Probabilidade II

Aula 1

Março de 2009

Mônica Barros, D.Sc.

Quem sou eu?

- **Mônica Barros**

  - Doutora em Séries Temporais – PUC-Rio
  - Mestre em Estatística – University of Texas at Austin, EUA
  - Bacharel em Matemática – University of Washington, Seattle, EUA
  - Bacharel em Economia – Univ. Estácio de Sá
  - Professora da ENCE e da PUC-Rio (Depto. De Eng. Elétrica)
    - E-mails: monica@ele.puc-rio.br, monica@mbarros.com
  - Home page: http://www.mbarros.com

Informações importantes

- **Datas de provas**
  - 1ª prova - 05 de maio (3ª. Feira)
  - 2ª. Prova – 30 de junho (2ª. Feira)
  - Exame Final – 09 de julho (5ª feira)
- **Sites de internet**
  - www.mbarros.com – conterá as transparências das aulas – ainda não as coloquei no “site”, aguarde até o fim desta semana.
  - Grupo do yahoo – cadastramento obrigatório – enviar e-mail para: ence_prob2_200901-subscribe@yahoogrupos.com.br

Bibliografia

- **Veja a ementa do curso**
  - Praticamente não usarei o livro do Meyer.
  - Alternativas:

    - DUDEWICZ, E.J. e MISHRA. S.N. (1988). Modern Mathematical Statistics, Wiley, NY.
    - HOGG, R.V. e CRAIG, A.T. (1978) - Introduction to Mathematical Statistics, Macmillan Publishing Co, New York.
    - MOOD, A.M., GRAYBILL, F.A. e BOES, D.C. (1974) - Introduction to the theory of Statistics, 3rd edition, McGraw-Hill, New York.

Conteúdo

- Vetores Aleatórios
  - Densidades Conjuntas
  - Densidades Marginais
  - Densidades Condicionais

Objetivos

- Na prática, freqüentemente encontramos variáveis aleatórias em conjunto, por exemplo:
  - Preço e venda de um produto
  - Número de passageiros num vôo da Ponte Aérea e horário de embarque
  - IBOVESPA e Risco Brasil
  - Juros, Taxa de Câmbio, Inflação, Nível de Atividade da Indústria e Risco Brasil
- Como estudar o comportamento destas variáveis em conjunto?

Objetivos

- Encontrar distribuições de probabilidade ***conjuntas*** para expressar a relação entre duas ou mais variáveis aleatórias.
- Encontrar distribuições de probabilidade ***condicionais*** que expressam o efeito de um subconjunto de variáveis sobre outro subconjunto de variáveis.
- Encontrar distribuições de probabilidade ***marginais*** que indicam o comportamento de uma única variável sem o efeito das outras.

Objetivos

- Definir e verificar as implicações da ***independência*** entre variáveis aleatórias.
- Definir ***medidas da associação*** entre duas variáveis, como a covariância e o coeficiente de correlação.
- Definir os ***momentos condicionais***, estudar algumas de suas propriedades e apresentar a curva de regressão.

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Vetor Aleatório

- Seja E uma experiência aleatória com espaço amostral S. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ funções que associam números reais a cada resultado da experiência E.

- Então $(X_1, X_2, ..., X_n)$ é um vetor aleatório de dimensão n. O caso particular n = 2 será de interesse especial aqui, e a seguir apresentaremos as definições para vetores aleatórios bidimensionais.

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Função de Prob. Conjunta

- Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias discretas. A ***função de probabilidade conjunta*** de X_1 e X_2 é uma função não negativa $f(x_1,x_2)$ tal que:

- $\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = f(x_1,x_2)$

- Esta definição pode ser estendida de maneira trivial para uma n-upla de variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$. Analogamente ao caso unidimensional, o somatório da função de probabilidade conjunta para todos os valores de X_1 e X_2 deve ser 1, isto é:

$$\sum_{\text{todo } x_1} \sum_{\text{todo } x_2} f(x_1, x_2) = 1$$

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Densidade Conjunta

- Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias contínuas. A ***densidade conjunta*** de X_1 e X_2 é uma função não negativa $f(x_1,x_2)$ tal que, para qualquer subconjunto A de $\Re^2$:

$$\Pr\{(X_1, X_2) \in A\} = \iint_A f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$$

- Em particular, para calcularmos a probabilidade de X_1 e X_2 estarem num retângulo só precisamos calcular a integral dupla a seguir:

$$\Pr(a \le X_1 \le b, c \le X_2 \le d) = \int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2)\,dx_2 dx_1$$

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Condição de Normalização

- A condição de normalização no caso bivariado é análoga ao caso univariado. A integral (ou somatório duplo) da densidade (ou função de probabilidade) conjunta deve ser 1. Ou seja:
  - Para v.a. discretas

$$\sum_{\text{todo } x_1} \sum_{\text{todo } x_2} f(x_1, x_2) = 1$$

  - Para v.a. contínuas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = 1$$

Densidade Conjunta/Função de Probabilidade Conjunta

- Interpretação
  - Pode-se fazer uma analogia com a probabilidade da interseção de dois eventos.
  - A densidade (ou a função de probabilidade conjunta) permite o cálculo de probabilidades relativas às duas variáveis simultaneamente, onde os efeitos das duas variáveis são levados em consideração ao mesmo tempo.

Densidade Conjunta/Função de Probabilidade Conjunta

- Mas, o que acontece se desejamos “olhar” para cada uma das variáveis separadamente, ignorando por completo o efeito da(s) outra(s)?
- Isso nos leva ao conceito de densidade (ou função de probabilidade) marginal.

Densidade Marginal

- Seja f (x_1,x_2) a densidade (ou função de probabilidade conjunta de X_1 e X_2.
- A densidade marginal de X_1 é dada por:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_2 & \text{no caso contínuo} \\ \sum_{\text{todo } x_2} f(x_1,x_2) & \text{no caso discreto} \end{cases}$$

- Analogamente, a densidade marginal de X_2 é dada por:

$$f_2(x_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_1 & \text{no caso contínuo} \\ \sum_{\text{todo } x_1} f(x_1,x_2) & \text{no caso discreto} \end{cases}$$

Densidade Marginal

- Nota
- A rigor, no caso discreto, deveríamos chamar $f_1(x_1)$ e $f_2(x_2)$ de funções de probabilidade marginais.
- É importante perceber que as densidades marginais definidas na página anterior nos permitem calcular probabilidades para uma variável IGNORANDO COMPLETAMENTE o efeito da outra variável. Por exemplo:

$$\Pr(a < X_1 < b) = \int_a^b f_1(x_1)dx_1$$

- que seria a expressão usada se X_2 “não existisse”.

Densidade Condicional

- **Densidade Condicional de X_2 dado X_1**

$$f(x_2 \mid x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} \quad \text{desde que } f_1(x_1) > 0$$

- **Densidade Condicional de X_1 dado X_2**

$$f(x_1 \mid x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} \quad \text{desde que } f_2(x_2) > 0$$

- **Note a semelhança entre a definição de densidades condicionais e a de probabilidade condicional. A densidade condicional expressa a distribuição de uma das variáveis sujeita a uma informação adicional, que é a ocorrência da outra variável.**

Densidade Condicional

- **Estas densidades nos permitem calcular probabilidade condicionais. Se as variáveis aleatórias são contínuas:**

$$\Pr\left(a < X_2 < b \middle| X_1 = x_1\right) = \int_a^b f\left(x_2 \middle| x_1\right) dx_2$$

- **É a densidade condicional de X_2 dado X_1=x_1. Analogamente podemos escrever a densidade condicional de X_1 dado X_2=x_2 como:**

$$\Pr\left(c < X_1 < d \middle| X_2 = x_2\right) = \int_c^d f\left(x_1 \middle| x_2\right) dx_1$$

Densidade Condicional

- **As definições no caso discreto são análogas.**

- **No caso contínuo não faz diferença se o intervalo (a, b) é fechado ou aberto, isto é, não faz diferença se substituirmos um ou mais dos sinais de " < " por " ≤ ".**

- **No caso discreto existe diferença se o intervalo é aberto ou fechado, por exemplo, desejarmos calcular Pr(a ≤ X_2 ≤ b) (ou a probabilidade condicional de X_2 estar neste intervalo dado X_1 = x_1) devemos incluir os pontos a e b no cálculo.**

Densidade Condicional

- **No caso contínuo surge uma dificuldade. Como interpretar a probabilidade condicional de que (a < X_2 < b) dado que X_1 = x_1 já que o evento {X_1 = x_1} tem probabilidade zero?**

- **A resposta é: pense em x_1 como um parâmetro desta distribuição condicional – à medida que este parâmetro varia, a distribuição condicional assume novas formas.**

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 1

- Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas com a seguinte função de probabilidade conjunta:

Pr(X = x) →	X = 0	X = 1	X = 2	X = 3
Pr(Y = y) ↓				
Y = 0	0.2	0.1	0.1	0
Y = 1	0.1	0.1	0.1	0.1
Y =2	0	0.1	0.1	0

- Encontre as funções de probabilidade (marginais) de X e Y.
- Encontre a função de probabilidade condicional de X dado Y = 0.
- Encontre a função de probabilidade condicional de Y dado X = 0.

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 1

- A função de probabilidade marginal de X é dada por:

$$f_x(x) = \Pr(X = x) = \sum_{\text{todo y}} f(x,y) = \sum_{\text{todo y}} \Pr(X = x, Y = y) = \sum_{y=0}^{2} \Pr(X = x, Y = y)$$

- Logo:

$f_x(0) = Pr(X=0) = 0.2 + 0.1 + 0 = 0.3$
$f_x(1) = Pr(X=1) = 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$
$f_x(2) = Pr(X=2) = 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$
$f_x(3) = Pr(X=3) = 0 + 0.1 + 0 = 0.1$

- A função de probabilidade marginal de Y é encontrada de maneira análoga. Verifique que: Pr(Y = 0) = Pr(Y = 1) = 0.4 e Pr(Y=2) = 0.2.

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 1

- A função de probabilidade condicional de X dado Y = 0 é obtida pela divisão da conjunta pela probabilidade de Y ser igual a zero (0.4). Então:

f(x| Y = 0) = f(x,0)/Pr(Y=0) = f(x,0)/0.4
para os diversos valores de X.

f(0|0) = Pr(X = 0 | Y = 0) = f(0,0)/0.4 = 0.2/0.4 = 0.5
f(1|0) = Pr(X = 1 | Y = 0) = f(1,0)/0.4 = 0.1/0.4 = 0.25
f(2|0) = Pr(X = 2 | Y = 0) = f(2,0)/0.4 = 0.1/0.4 = 0.25
f(3|0) = Pr(X = 3 | Y = 0) = f(3,0)/0.4 = 0/0.4 = 0

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 1

- A função de probabilidade condicional de Y dado X = 0 é a conjunta divida pela probabilidade de X ser igual a zero, que é 0.3.

f(y | X = 0) = f(0, y)/ Pr (X = 0) = f(0, y) / 0.3

f(0|0) = Pr(Y = 0 | X = 0) = f(0,0)/0.3 = 0.2/0.3 = 2/3
f(1|0) = Pr(Y = 1 | X = 0) = f(0,1)/0.3 = 0.1/0.3 = 1/3
f(2|0) = Pr(Y = 2 | X = 0) = f(0,2)/0.3 = 0/0.3 = 0

- Note que a soma destas probabilidades para todos os valores de Y é 1 (ou seja, a função de probabilidade condicional satisfaz a condição de normalização). O mesmo acontece para a condicional de X dado Y = 0 da página anterior.

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Notas

- Deve-se ressaltar que as funções de probabilidade (e densidades) marginais e condicionais são funções de probabilidade (ou densidades) propriamente ditas, ou seja, devem obedecer a condição de normalização, como observado neste exemplo.
- A densidade (ou função de probabilidade conjunta) deve satisfazer uma condição de normalização que envolve uma integral ou somatório duplo (no caso de um vetor aleatório de dimensão dois, como o que estamos tratando aqui).

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 2

- Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta:

$$f(x,y) = c.e^{-x/2}.e^{-y/3} \text{ se } x>0 \text{ e } y>0$$

- Encontre a constante c tal que f(x, y) seja uma densidade.
- Calcule as densidades marginais de X e Y.
- Calcule Pr (X > 2).
- Calcule Pr (1 < Y < 3)

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 2

- A constante é encontrada a partir da condição de normalização, isto é, fazendo a integral dupla sobre todos os valores de X e Y igual a um.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)dxdy = 1 = \int_0^\infty\int_0^\infty c.e^{-x/2}.e^{-y/3}dxdy = \int_0^\infty c.e^{-y/3}dy\int_0^\infty e^{-x/2}dx =$$

$$= \int_0^\infty c.e^{-y/3}.\left(0 - \frac{1}{(-1/2)}\right)dy = \int_0^\infty 2.c.e^{-y/3}dy = 2.c.\left(0 - \frac{1}{(-1/3)}\right) = 6.c$$

- Então 6c = 1 $\Rightarrow$ c = 1/6

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 2

- A densidade marginal de X é:

$$f_x(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy = \int_0^\infty \frac{1}{6}.e^{-x/2}.e^{-y/3}dy = \frac{1}{6}.e^{-x/2}\int_0^\infty e^{-y/3}dy = \frac{e^{-x/2}}{6}.\left(0 - \frac{1}{(-1/3)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x/2} \text{ se } x>0$$

- Ou seja, X tem densidade Exponencial com média 2.

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 2

- A densidade marginal de Y é:

$$f_y(y) = \int_0^\infty f(x,y)dx = \int_0^\infty \frac{1}{6}.e^{-x/2}.e^{-y/3}dx = \frac{1}{6}e^{-y/3}\int_0^\infty e^{-x/2}dx =$$

$$= \frac{e^{-y/3}}{6}.\left(0 - \frac{1}{(-1/2)}\right) = \frac{1}{3}e^{-y/3} \text{ se } y > 0$$

- Isto é, Y é Exponencial com média 3.

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 2

- A probabilidade de X > 2 é calculada a partir da densidade marginal de X.

$$\Pr(X > 2) = \int_2^\infty \frac{e^{-x/2}}{2}dx = \frac{1}{2}.\left[0 - \frac{e^{-1}}{(-1/2)}\right] = e^{-1}$$

- De maneira semelhante, Pr(1< Y< 3) é computada a partir da marginal de Y.

$$\Pr(1 < Y < 3) = \int_1^3 \frac{e^{-y/3}}{3}dy = \frac{1}{3}.\left(\frac{-1}{(1/3)}\right).\left(e^{-3/3} - e^{-1/3}\right) =$$

$$= e^{-1/3} - e^{-1} = 0.7165 - 0.3679 = 0.3486$$

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 2

- Nota:
- A probabilidade de X > 2 poderia ter sido calculada também através da densidade conjunta, notando-se que os seguintes eventos são equivalentes:

$$\{X > 2\} = \{X > 2 \cap Y \text{ qualquer}\} = \{X > 2 \cap Y > 0\}$$

$$\Pr\{X > 2\} = \int_0^{+\infty}\int_2^{\infty}\frac{1}{6}e^{-x/2}e^{-y/3}dxdy = \frac{1}{6}\int_0^{+\infty}e^{-y/3}dy\{+2e^{-2/2}\} = \frac{1}{3}e^{-1}\int_0^{+\infty}e^{-y/3}dy = \frac{1}{3}e^{-1}\{+3\} = e^{-1}$$

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 2

- Analogamente, a probabilidade de 1 < Y < 3 poderia ter sido calculada também através da densidade conjunta usando um argumento semelhante ao do slide anterior.

Exemplo 3

- Suponha que X e Y têm densidade conjunta:

$$f(x,y)=\frac{x.y}{3}+x^2 \quad \text{onde } 0<x\le 1 \text{ e } 0\le y\le 2$$

1) Calcule as densidades marginais de X e Y.
2) Encontre a densidade condicional de Y dado X = x.
3) Encontre a densidade condicional de X dado Y = y.

Exemplo 3

- A densidade marginal de X é:

$$f_x(x)=\int_0^2 f(x,y)dy=\int_0^2\left(\frac{xy}{3}+x^2\right)dy=2.x^2+\frac{2.x}{3}, \text{onde } 0<x\le 1$$

- A densidade marginal de Y é:

$$f_y(y)=\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^1\left(\frac{xy}{3}+x^2\right)dx=\frac{1}{3}+\frac{y}{6}, \text{onde } 0\le y\le 2$$

- A densidade condicional de Y dado X = x é dada por:

$$f(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)}=\frac{\frac{xy}{3}+x^2}{\frac{2x}{3}+2x^2}=\frac{1}{2}.\left[\frac{x+y/3}{x+1/3}\right], \text{onde } x\in(0,1] \text{ e } y\in[0,2]$$

Exemplo 3

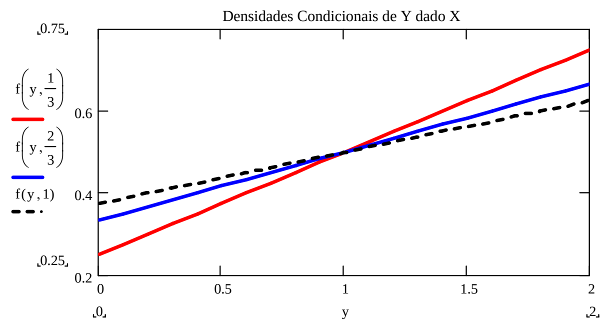
- Note que existe um número infinito de densidades condicionais de Y dado X =x, cada uma para um valor de x diferente no intervalo (0,1].

- Por exemplo, se x = 1, a densidade condicional de Y dado X = 1 é:

$$f(y\,|\,x=1)=\frac{1}{2}.\left(\frac{1+y/3}{1+1/3}\right)=\frac{1}{2}.\left(\frac{3}{4}\right)\left(1+\frac{y}{3}\right)=\frac{3}{8}.\left(1+\frac{y}{3}\right), \text{onde } y\in(0,2]$$

Exemplo 3

- Abaixo exibimos um gráfico com 3 densidades condicionais. Note que, à medida que o “parâmetro” x se altera, a forma da densidade condicional muda.



ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 3

- **A densidade condicional de X dado Y = y é:**

$$f(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\frac{x^2+\frac{xy}{3}}{\frac{1}{3}.\left(1+\frac{y}{2}\right)}=\frac{3.x^2+x.y}{1+y/2}$$, onde x ∈ (0,1] e y ∈ [0,2]

- **Substituindo-se Y = 1 acima encontramos a densidade condicional de X dado Y = 1:**

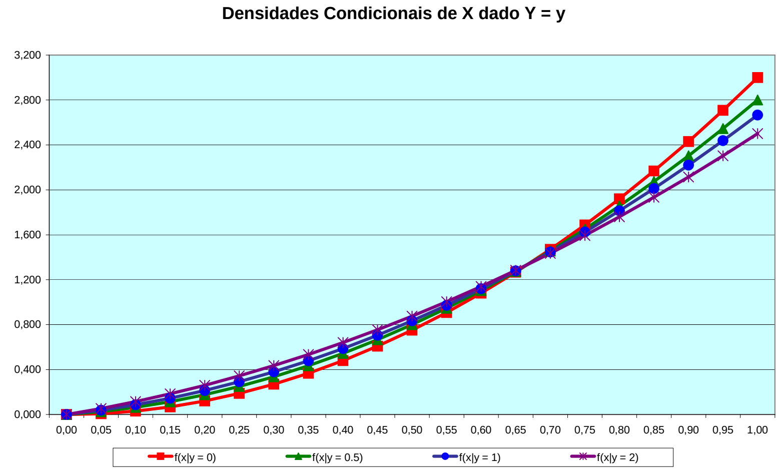
$$f(x|Y=1)=\frac{3.x^2+x}{1+1/2}=\frac{2}{3}.(3.x^2+x)$$, onde x ∈ (0,1]

- **Se agora fazemos Y = 2 encontramos outra densidade condicional:**

$$f(x|Y=2)=\frac{3.x^2+2.x}{1+1}=\frac{(3.x^2+2.x)}{2}$$, onde x ∈ (0,1]

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 3



ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 4

- **Considere a seguinte densidade conjunta:**

$$f(x,y)=\lambda^2.e^{-\lambda y}$$, onde $\lambda > 0$, 0 ≤ x ≤ y

- **Calcule as densidades marginais de X e Y e a densidade condicional de X dado Y = y.**
- **Solução**
- **Neste caso devemos considerar, além da densidade conjunta, o domínio desta função, por que X e Y estão "misturados" neste domínio (note que temos a restrição 0 ≤ x ≤ y).**

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 4

- **A densidade marginal de X é obtida integrando-se a conjunta sobre y, e o intervalo de integração é (x, ∞) pois para que a conjunta seja maior que zero precisamos de 0 ≤ x ≤ y. Assim:**

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_x^{\infty} f(x,y)dy=\int_x^{\infty}\lambda^2.e^{-\lambda y}dy=$$
$$=\lambda^2.\left(\frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda}\right)\Bigg|_{y=x}^{\infty}=-\lambda.\left(0-e^{-\lambda x}\right)=+\lambda.e^{-\lambda x}$$

- **Ou seja, a densidade marginal de X é Exponencial com parâmetro λ.**

Exemplo 4

- A densidade marginal de Y é encontrada a partir da integral da conjunta para todo X. Os limites de integração são 0 e y. Assim:

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^y f(x,y)dx = \int_0^y \lambda^2.e^{-\lambda y}dx =$$

$$= \lambda^2.e^{-\lambda y}.(x)\Big|_0^y = \lambda^2.y.e^{-\lambda y}, \text{onde } y \geq 0$$

- Veremos depois que esta densidade é um caso particular da densidade Gama.

Exemplo 4

- A densidade condicional de X dado Y = y é facilmente encontrada a partir de sua definição.

- Os valores possíveis de X estão no intervalo [0,y] para cada valor do "parâmetro" y.

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)} = \frac{\lambda^2.e^{-\lambda y}}{\lambda^2.y.e^{-\lambda y}} = \frac{1}{y}, \text{onde } 0 \leq x \leq y$$

- Ou seja, dado um valor de Y = y, a densidade condicional de X é Uniforme no intervalo [0,y].

Para casa

- Sejam X e Y v.a. contínuas com densidade conjunta:

$$f(x,y) = cy^2 + 2xy \quad \text{onde } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 1$$

- Encontre a constante <u>c</u> que faz desta expressão uma densidade.

  Encontre a densidade marginal de X.
- Encontre a densidade marginal de Y.
- Encontre a densidade condicional de X dado Y = y.