# Métodos Estatísticos de Apoio à Decisão

## Aula 8


## Mônica Barros, D.Sc.


### Agosto de 2008



# Programa do Curso

| Disciplina | Métodos Estatísticos de Apoio à Decisão - BI MASTER 2008 | | |
|---|---|---|---|
| Responsável | Mônica Barros | | |
| Ferramentas | Excel, @Risk | | |
| **Aula** | **Tipo (T-P-C)** | **Tema** | **Descrição** |
| 1 | T, P | Estatística Descritiva | Gráficos, tabelas e medidas numéricas |
| 2 | T | Probabilidade: Definições básicas | Definições básicas: probabilidade, espaço amostral, eventos, propriedades das probabilidades, Probabilidade Condicional, Independência;Teorema de Bayes |
| 3 | T | Probabilidade: Definições básicas | Variáveis Aleatórias Contínuas e Discretas , Função de Probabilidade, Função Densidade, Função de Distribuição, Momentos de uma v.a., Média, Variância e Desvio Padrão |
| 4 | T, P | Probabilidade: Definições básicas | Variáveis Discretas: Bernoulli, Binomial, Hipergeométrica, Geométrica, Binomial Negativa, Poisson |
| 5 | T, P | Probabilidade: v.a. Contínuas | Variáveis Contínuas: Uniforme, Exponencial, Normal |
| 6 | P | Pratica 1 | Aula de exercícios - As funções do Excel para cálculo de probabilidades para v.a. Contínuas e discretas |
| 7 | T, C | Probabilidade: v.a. Contínuas E CASE 1: Simulação - soma de v.a. e o teorema central do limite CASE 2: Otimização de um portfolio simulado - propriedades da média e variância e o uso do Solver | O teorema central do limite e a importância da distribuição Normal.O teorema central do limite na prática - soma de variáveis aleatórias e a convergência para a Normal. Distribuição da soma de v.a. e da média amostral. Propriedades da média e variância de combinações lineares de v.a. - o efeito da correlação. O uso do Solver do Excel |
| 8 | T, P | Distribuições Amostrais | Amostra aleatória simples, distribuição da média amostral, distribuição de p^ |
| 9 | T, P | Estatística - estimação pontual | Estimação da média da população com sigma conhecido e desconhecido e para proporções |
| 10 | T/P | Estatística - estimação por intervalos | Intervalos de confiança para amostras Normais e proporção Binomial - Exercícios - intervalos de confiança empregando o Excel |
| 11 | T/P | Estatística - testes de hipóteses | Teste de hipótese para amostrais normais e Exercícios |



# Aula 8

- Distribuições Derivadas da Normal
- Diferença entre Probabilidade e Estatística
- Amostra Aleatória
- Objetivos da Estatística
- Estimação Pontual
- Estimação Bayesiana X Clássica
- Estimação por Máxima Verossimilhança
- Estimação por Método de Momentos



# Distribuições Derivadas da Normal

- **Densidade Qui-quadrado com k graus de liberdade**

  **Seja X uma variável aleatória contínua e positiva com densidade dada por:**

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}.\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.x^{\frac{k}{2}-1}.e^{-x/2} \quad \text{onde} \quad x > 0$$

- **Então X tem densidade Qui-quadrado com k graus de liberdade, e escrevemos: $X \sim \chi^2_k$**

## Distribuições Derivadas da Normal

- A densidade Qui-quadrado é apenas um caso particular de uma outra densidade chamada densidade Gama, que também inclui a Exponencial como caso particular.

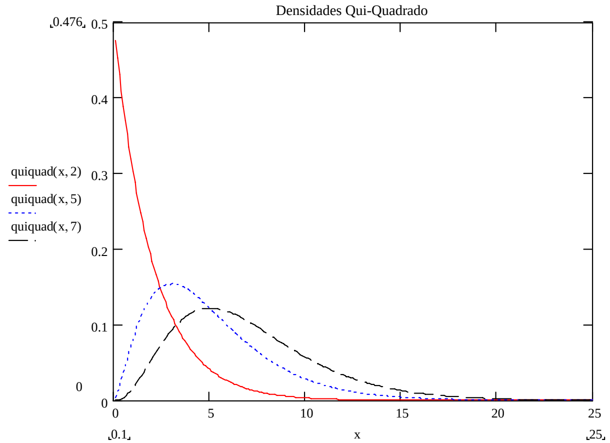
- Se X é Qui-quadrado com n graus de liberdade então:

$$E(X) = \frac{n/2}{1/2} = n$$

$$VAR(X) = \frac{n/2}{(1/2)^2} = 2n$$

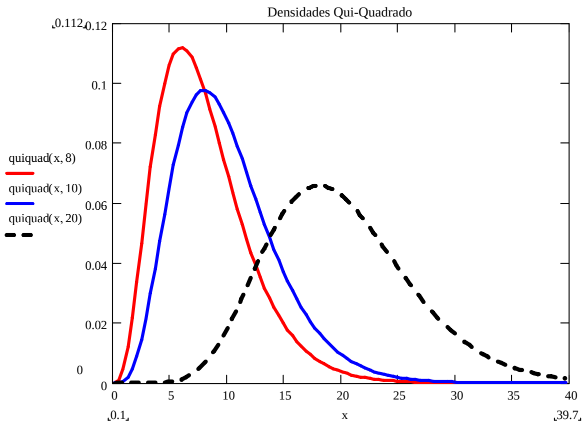


## Distribuição Qui-Quadrado






## Distribuição Qui-Quadrado






## Distribuição Qui-quadrado

- Tabelas da função de distribuição Qui-quadrado
  - A densidade Qui-quadrado é tabelada para diversos graus de liberdade.
  - As tabelas geralmente fornecem o valor $x_{1-\alpha}$ tal que $\Pr(X < x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ para $\alpha$ = 1%, 5%, 10%. Também existem tabelas que apresentam o valor $x_\alpha$ tais que $\Pr(X < x_\alpha) = \alpha$, isto é, $\Pr(X > x_\alpha) = 1 - \alpha$.

## Distribuição Qui-quadrado

| probabilidade → / graus de liberdade ↓ | 0.01 | 0.05 | 0.10 | 0.25 | 0.50 | 0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.000 | 0.004 | 0.016 | 0.102 | 0.455 | 1.323 | 2.706 | 3.841 | 6.635 |
| 2 | 0.020 | 0.103 | 0.211 | 0.575 | 1.386 | 2.773 | 4.605 | 5.991 | 9.210 |
| 3 | 0.115 | 0.352 | 0.584 | 1.213 | 2.366 | 4.108 | 6.251 | 7.815 | 11.345 |
| 4 | 0.297 | 0.711 | 1.064 | 1.923 | 3.357 | 5.385 | 7.779 | 9.488 | 13.277 |
| 5 | 0.554 | 1.145 | 1.610 | 2.675 | 4.351 | 6.626 | 9.236 | 11.070 | 15.086 |
| 6 | 0.872 | 1.635 | 2.204 | 3.455 | 5.348 | 7.841 | 10.645 | 12.592 | 16.812 |
| 7 | 1.239 | 2.167 | 2.833 | 4.255 | 6.346 | 9.037 | 12.017 | 14.067 | 18.475 |
| 8 | 1.647 | 2.733 | 3.490 | 5.071 | 7.344 | 10.219 | 13.362 | 15.507 | 20.090 |
| 9 | 2.088 | 3.325 | 4.168 | 5.899 | 8.343 | 11.389 | 14.684 | 16.919 | 21.666 |
| 10 | 2.558 | 3.940 | 4.865 | 6.737 | 9.342 | 12.549 | 15.987 | 18.307 | 23.209 |
| 11 | 3.053 | 4.575 | 5.578 | 7.584 | 10.341 | 13.701 | 17.275 | 19.675 | 24.725 |
| 12 | 3.571 | 5.226 | 6.304 | 8.438 | 11.340 | 14.845 | 18.549 | 21.026 | 26.217 |
| 13 | 4.107 | 5.892 | 7.041 | 9.299 | 12.340 | 15.984 | 19.812 | 22.362 | 27.688 |
| 14 | 4.660 | 6.571 | 7.790 | 10.165 | 13.339 | 17.117 | 21.064 | 23.685 | 29.141 |
| 15 | 5.229 | 7.261 | 8.547 | 11.037 | 14.339 | 18.245 | 22.307 | 24.996 | 30.578 |
| 16 | 5.812 | 7.962 | 9.312 | 11.912 | 15.338 | 19.369 | 23.542 | 26.296 | 32.000 |
| 17 | 6.408 | 8.672 | 10.085 | 12.792 | 16.338 | 20.489 | 24.769 | 27.587 | 33.409 |
| 18 | 7.015 | 9.390 | 10.865 | 13.675 | 17.338 | 21.605 | 25.989 | 28.869 | 34.805 |
| 19 | 7.633 | 10.117 | 11.651 | 14.562 | 18.338 | 22.718 | 27.204 | 30.144 | 36.191 |
| 20 | 8.260 | 10.851 | 12.443 | 15.452 | 19.337 | 23.828 | 28.412 | 31.410 | 37.566 |



## Distribuição Qui-quadrado

- Função de Distribuição Qui-quadrado no Excel
- Use as funções DIST.QUI e INV.QUI
- A tabela anterior foi produzida usando INV.QUI – dada uma probabilidade e o grau de liberdade, a função INV.QUI retorna o ponto correspondente da densidade tal que a probabilidade de estar ACIMA do ponto é a especificada como argumento da função.



## Distribuição Qui-quadrado

- Função de Distribuição Qui-quadrado no Excel
- Por exemplo, para uma Qui-quadrado com 10 graus de liberdade:
- INV.QUI(0.99, 10) = 2.558
- INV.QUI(0.01,10) = 23.209
- Ou seja, a probabilidade de uma v.a. Qui-quadrado com 10 graus de liberdade exceder 2.558 é 0.99, e a probabilidade da mesma variável exceder 23.209 é 0.01.

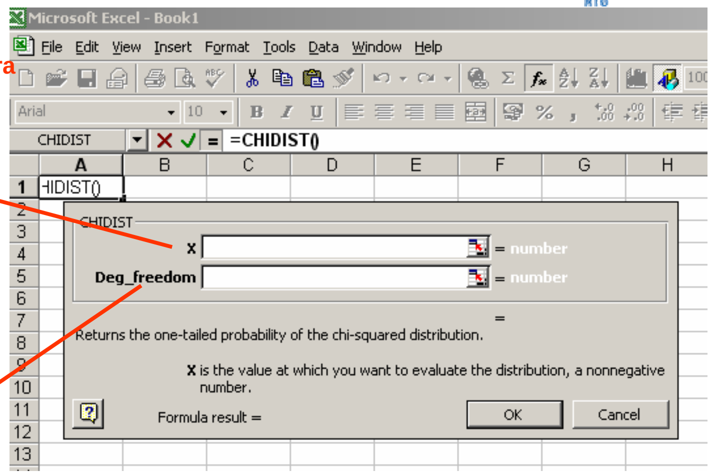


## Distribuição Qui-Quadrado

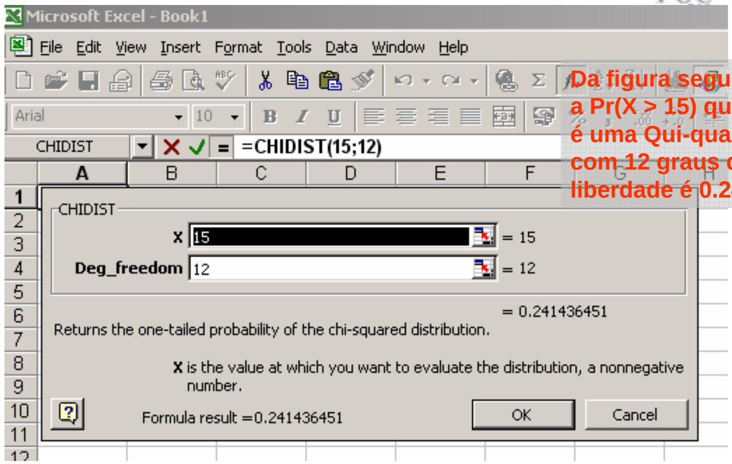
Valor de x para o qual desejamos

Pr(X > x)

Graus de liberdade da Qui-quadrado



# Distribuição Qui-Quadrado




Da figura segue que, a Pr(X > 15) quando X é uma Qui-quadrado com 12 graus de liberdade é 0.2414



# Distribuição Qui-Quadrado

- Por exemplo:
- Supondo que X seja uma variável aleatória com densidade qui-quadrado com 6 graus de liberdade, a probabilidade de X exceder 0.87 é 99%.
- Analogamente, a probabilidade de X exceder 12.59 é 5% e a probabilidade de X estar acima de 16.81 é apenas 1%.

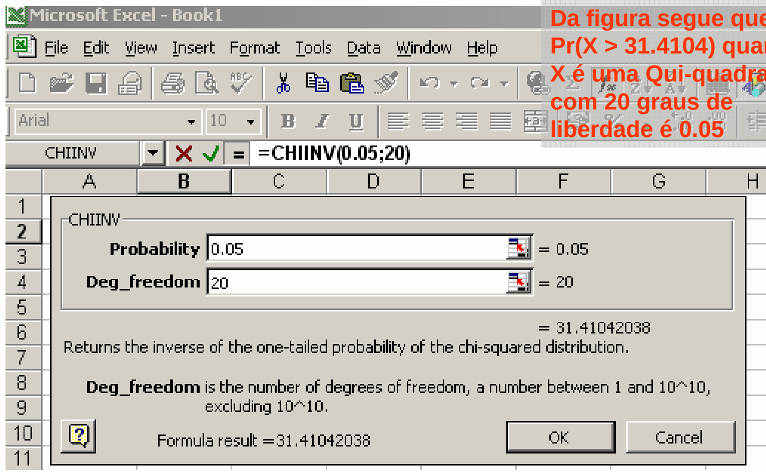


# Distribuição Qui-Quadrado

- Podemos estar interessados na pergunta “ao contrário”. Dada uma Qui-Quadrado com k graus de liberdade e uma probabilidade $\alpha$ , qual é o ponto tal que a probabilidade de estar ACIMA dele é $\alpha$?
- O Excel também nos dá esta resposta, através da função INV.CHI.



# Distribuição Qui-Quadrado




Da figura segue que, a Pr(X > 31.4104) quando X é uma Qui-quadrado com 20 graus de liberdade é 0.05

## Distribuição Qui-quadrado

- A densidade Qui-quadrado é importante no contexto de amostras aleatórias Normais, na estimação da variância.
- Também pode-se provar que o quadrado de uma variável Normal padrão (que estudaremos a seguir) tem densidade Qui-quadrado com um grau de liberdade.



## Distribuições Derivadas da Normal

- Uma propriedade muito importante da densidade Qui-quadrado é a preservação da mesma família de densidades quando somamos variáveis independentes.
- Ou seja, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis independentes, cada uma com distribuição Qui-quadrado, a soma de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ também é uma variável aleatória qui-quadrado.



## Distribuições Derivadas da Normal

- Teorema (aditividade da densidade Qui-quadrado)
- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. aleatórias independentes, e suponha que $X_i$ tem densidade qui-quadrado com $k_i$ graus de liberdade. Seja $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ .
- Então Y tem também uma densidade Qui-quadrado, mas com $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ graus de liberdade.
- O próximo teorema exibe a relação existente entre as densidades N(0,1) e Qui-quadrado.



## Distribuições Derivadas da Normal

**Teorema**

Seja $Z \sim N(0,1)$ . Então $V = Z^2$ tem densidade Qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

- A combinação dos dois últimos teoremas leva a um resultado importante.
- Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ v.a. independentes e identicamente distribuídas com densidade N(0,1). Então:

## Distribuições Derivadas da Normal

$$V = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$$

- tem densidade Qui-quadrado com n graus de liberdade.
- Este resultado segue trivialmente dos dois últimos, se lembrarmos que cada $Z_i^2$ tem densidade qui-quadrado com 1 grau de liberdade (e são todos independentes).



## Distribuições Derivadas da Normal

- **Por que a densidade Qui-quadrado é importante?**
- Porque está relacionada com a distribuição da variância amostral de uma amostra aleatória Normal, como indicado no próximo teorema.
- Por exemplo, se desejarmos encontrar um intervalo baseado na variância amostral que contenha, com alta probabilidade, a variância (desconhecida) da distribuição Normal, este intervalo será construído a partir da distribuição Qui-quadrado.



## Distribuições Derivadas da Normal

- Teorema
- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Seja $S^2$ a variância amostral:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

- Então:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2}$$

- **tem distribuição Qui-quadrado com (n-1) graus de liberdade.**



## Distribuições Derivadas da Normal

- A partir deste teorema podemos deduzir facilmente a média e variância de $S^2$.
- Teorema
- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Seja $S^2$ a variância amostral. Então:

$$E(S^2) = \sigma^2$$

$$VAR(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

## Distribuições Derivadas da Normal

- A distribuição t de Student
  - Tem apenas um parâmetro k, o número de graus de liberdade, e é definida como:

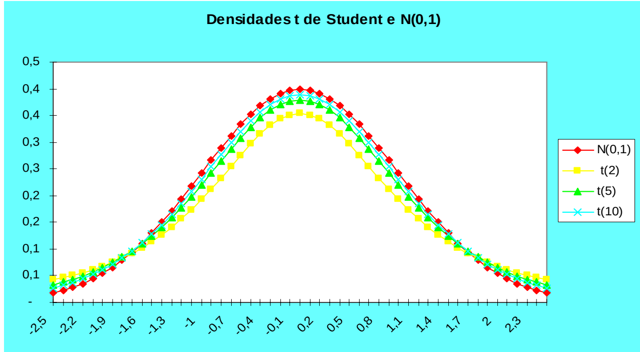
$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}}$$

  - Onde Z é N(0,1) e V é Qui-Quadrado com k graus de liberdade, e ambos são independentes.
  - Esta distribuição é simétrica em torno de zero, também tem forma de sino e, à medida que o número de graus de liberdade cresce, se aproxima da N(0,1).



## Distribuições Derivadas da Normal

- Quando <u>n</u> (número de graus de liberdade) cresce, a densidade t de Student se torna cada vez mais parecida com uma N(0,1)






## Distribuições Derivadas da Normal

- Exemplo (uso de uma tabela t)

| graus de liberdade | 0.9 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 5 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 10 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 15 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 20 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |

- Por exemplo, se T tem 10 graus de liberdade, a probabilidade de T ser menor que 1.372 é 90%. Se o número de graus de liberdade passa a 15, o valor tal que a probabilidade de T ser menor que ele é 90% passa a ser 1.341.



## Distribuições Derivadas da Normal

- Função do Excel para a distribuição t

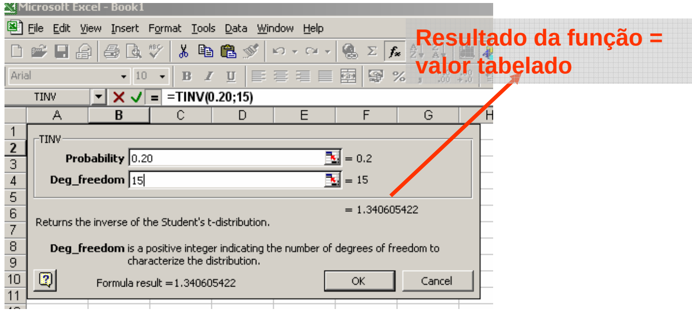
| Função | Descrição |
|---|---|
| invt(p; gl) | Para a distribuição t de Student, calcula o valor t para p = 2.$\alpha$, com gl graus de liberdade |

- Por exemplo, INVT(0.05, 20) = 2.086 é o valor da distribuição t com 20 graus de liberdade tal que Pr(T > 2.086) = 0.05/2 = 0.025.

CUIDADO com a especificação da probabilidade para esta função, a função INVT fornece as probabilidades “bi-laterais”.

## Distribuições Derivadas da Normal

- Refazemos a seguir o exemplo anterior com a função INVT do Excel. Note a especificação da probabilidade como 0.20 = 2.$\alpha$, enquanto na nossa tabela as colunas referem-se a 1- $\alpha$.






## Distribuições Derivadas da Normal

- Por que a densidade t é importante?
- Ela é essencial no contexto de intervalos de confiança e testes de hipóteses, como veremos posteriormente. A justificativa vem, em parte, do próximo resultado.

- Teorema
- Sejam $X_1$, $X_2$, ...., $X_n$ uma amostra aleatória da distribuição N($\mu$, $\sigma^2$). Sejam $\overline{X}$ e $S^2$ a média e variância amostrais. Então:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \mu\right)}{S} \sim t_{n-1}$$



## Probabilidade e Estatística – Qual a Diferença?

- Até agora tivemos estivemos interessados em Probabilidade, ou seja, nosso objetivo era:
  - apresentar alguns dos modelos probabilísticos mais usuais e as situações em que eles surgem na prática.



## Diferença entre Probabilidade e Estatística

- A partir de agora começamos realmente a falar de Estatística.

- Os capítulos anteriores lidavam com Probabilidade. Qual a diferença?

- Em Probabilidade, a densidade (ou função de probabilidade) era inteiramente conhecida.

- Em Estatística, teremos uma amostra aleatória de uma distribuição com certos parâmetros desconhecidos, e procuraremos descobrir alguma coisa sobre estes parâmetros.

## Amostra Aleatória (a.a.)

- É apenas um conjunto de variáveis aleatórias iid (independentes e identicamente distribuídas).

- Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ formam uma a.a. então, em particular, todas as variáveis têm a mesma densidade ou função de probabilidade, e portanto suas médias são todas iguais (o mesmo ocorre com suas variâncias).



## Objetivos - Estatística

- A distribuição da amostra é conhecida exceto por alguns parâmetros que buscamos estimar.

- Objetivo: obter maneiras de encontrar estimadores ("chutes") destes parâmetros. Estes estimadores serão pontuais (e começaremos a estudar um importante método de esimação pontual hoje) ou por intervalos (nas próximas aulas).



## Objetivos - Estatística

- Também é preciso ter uma idéia clara das propriedades desejáveis destes estimadores, e saber, segundo algum critério, se o estimador encontrado é bom ou ruim.

- Finalmente, em Estatística estamos interessados também em testar hipóteses sobre parâmetros desconhecidos.



## Estimação Pontual

- Problemas de estimação de parâmetros surgem freqüentemente em Ciências e Engenharia. Por exemplo, muitas vezes desejamos estimar os seguintes parâmetros:
- a média de uma população,
- a variância ou desvio padrão de uma população,
- a proporção de ítens numa população que pertencem a uma classe de interesse,
- a diferença entre as médias de duas populações.

## Estimação Pontual

- **Como estimar estas quantidades? Alguns estimadores razoáveis nestas situações são:**
- **a média amostral,**
- **a variância ou desvio padrão amostrais,**
- **a proporção de ítens na amostra que pertencem à classe de interesse,**
- **a diferença entre as médias amostrais de duas amostras independentes, cada uma representando uma das populações.**



## Estimação Pontual

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **variáveis aleatórias.**
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **valores observados das variáveis aleatórias.**
- **Seja X uma variável aleatória com densidade f(x,θ), onde θ é um parâmetro, e θ ∈ Ω.**
- **O conjunto Ω é chamado de *espaço paramétrico*.**
- **Objetivo: estimar θ.**



## Estimação Pontual

- **A densidade de X, f(x, θ), tem uma forma conhecida, exceto pelo parâmetro θ que varia no conjunto Ω.**
- **Assim, não temos apenas uma densidade, mas uma <u>família</u> de densidades. A cada valor de θ em Ω. corresponde um membro da família.**
- **Aqui adotaremos o enfoque "clássico" de estimação, no qual θ é um parâmetro desconhecido, suposto <u>constante</u>, e <u>não uma variável aleatória</u>.**



## Estimação Bayesiana versus Clássica

- **Na estimação Bayesiana, θ será encarado como uma variável aleatória, e a ele associaremos uma distribuição de probabilidade.**
- **A distribuição de probabilidade de θ <u>antes</u> de observarmos os dados será chamada de distribuição a <u>priori</u>, e muitas vezes representa o nosso conhecimento <u>subjetivo</u> sobre o parâmetro θ.**
- **A distribuição de θ <u>após</u> observarmos a amostra é conhecida como distribuição a <u>posteriori</u> de θ.**

# Estimação Bayesiana versus Clássica

- Em estatística Bayesiana a verossimilhança (que iremos definir em breve) "carrega" a informação sobre θ contida na amostra, e resulta na atualização da densidade de θ, passando de uma priori para uma posteriori.
- A densidade a posteriori combina a "informação" subjetiva trazida pela priori com a "informação" proveniente da amostra.
- Os dois enfoques, Clássico e Bayesiano, concordam se o tamanho da amostra é grande.



# Definição do Problema de Estimação Pontual

- ***O problema geral aqui é ...***
- A partir dos dados observados $x_1, x_2, ..., x_n$ precisamos ***escolher um membro*** de uma família de densidades para representar estes dados.
- Ou seja, precisamos de um ***estimador pontual*** de θ (um "chute educado" para o valor desconhecido de θ).



# Definição do Problema de Estimação Pontual

- Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória da densidade f(x,θ).
- O objetivo agora é definir uma estatística $T = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ de tal modo que, após observarmos $X_1 = x_1,\ X_2 = x_2, ..., X_n = x_n$, $t = t(x_1, x_2, ..., x_n)$ seja uma boa estimativa pontual de θ.
- Na verdade, a cada amostra obtida, encontraremos um valor para a estatística usada para "chutar" θ, pois esta estatística é também uma variável aleatória



# Exemplo

- No próximo exemplo exibimos a média amostral de 5 amostras de tamanho 50 geradas a partir da densidade N(0,1) no Excel . A média amostral serve para estimar a média da distribuição (zero, neste caso) e portanto deve ser, para todas as amostras, um valor próximo de zero.
- Os resultados para as 5 amostras geradas estão a seguir.

| | Amostra 1 | Amostra 2 | Amostra 3 | Amostra 4 | Amostra 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Média | 0,076 | 0,150 | 0,180 | -0,199 | 0,055 |
| Desvio Padrão | 1,108 | 1,060 | 1,020 | 1,017 | 0,923 |
| Mediana | 0,168 | 0,179 | 0,241 | -0,206 | 0,072 |

# Exemplo

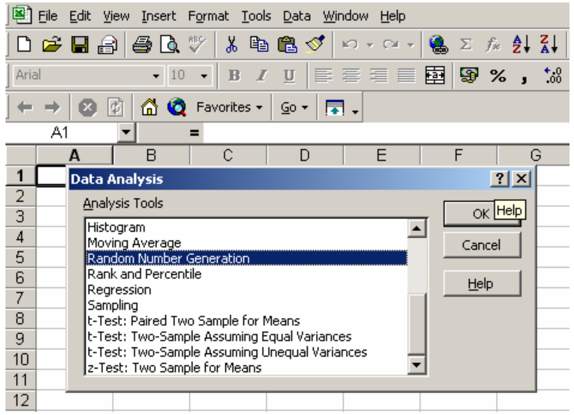
- Note que os valores estimados da média em cada amostra são todos diferentes entre si, e diferentes do valor real da média da população, que é = 0.

- Da mesma maneira, as estimativas do desvio padrão (cujo valor real é 1) são todas diferentes do valor real, e diferentes entre si. Note que , na prática, os valores de $\mu$ e $\sigma$ são desconhecidos, o que não acontece neste exemplo, onde geramos amostras de uma distribuição conhecida.



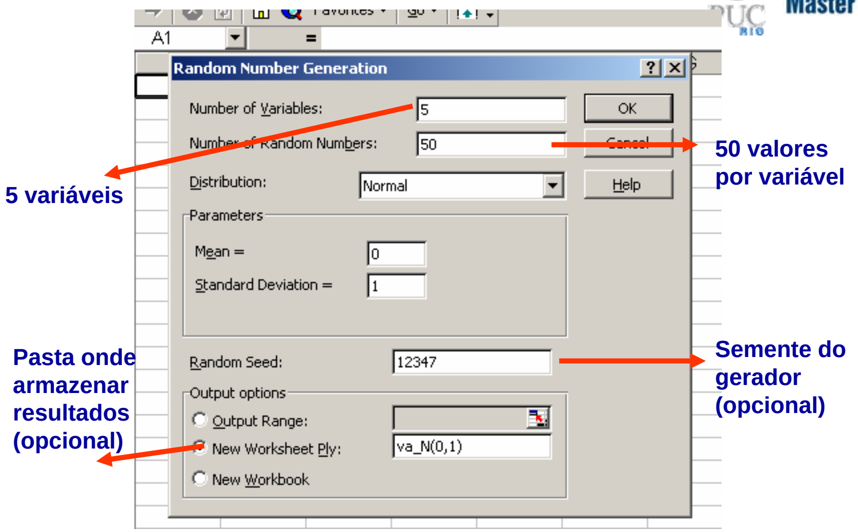
# Exemplo

- Como fazer a geração destas variáveis Normais no Excel? Lembre-se que o suplemento de análise de dados deve estar previamente instalado.






# Exemplo






# O que é um bom estimador?

- Existem potencialmente milhares de estimadores para um certo parâmetro.

- Por exemplo, para estimar a média de uma população poderíamos usar a média amostral, a mediana amostral, a média entre a menor e a maior observação na amostra e uma infinidade de outros estimadores "razoáveis".

## O que é um bom estimador?

- Como escolher dentre eles? Quais serão os critérios usados para comparar estimadores e caracterizar os bons estimadores?

- Por enquanto não responderemos a esta questão, mas começaremos a estudar o (talvez) mais tradicional método de estimação pontual.



## O que é um bom estimador?

- Existem 3 critérios muito usados na prática para encontrar estimadores e estudaremos os dois primeiros:
  - Método da máxima verossimilhança
  - Método dos momentos
  - Método dos mínimos quadrados



## Método da Máx. Verossimilhança

### A função de verossimilhança (likelihood function)

- Esta é uma função relativamente simples com um nome indigesto!

- "Likelihood" em inglês é uma palavra de uso corrente, que indica "plausibilidade". Ao contrário, "verossimilhança" é uma coisa meio obscura.

- Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória da densidade f(x,θ).



## Método da Máx. Verossimilhança

- A função de verossimilhança é a densidade conjunta encarada como função do parâmetro θ. Isto é:

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

- A partir da verossimilhança podemos encontrar um estimador, o estimador de máxima verossimilhança (MLE = maximum likelihood estimator).

- O MLE é obtido a partir da maximização da verossimilhança, geralmente feita através da equação dL(θ)/dθ = 0.

## Método da Máx. Verossimilhança

- É <u>equivalente maximizar</u> L(θ) ou seu logaritmo natural, l(θ) = log L(θ) onde log(.) indica o logaritmo na base e.
- Esta última função é chamada **log-verossimilhança** e é freqüentemente mais fácil de maximizar do que L(θ), pois as verossimilhanças muitas vezes podem ser escritas como exp{ ...} .
- A equivalência da maximização de L(θ) e l(θ) decorre do fato de L(θ) ser sempre maior que 0 (pois é o produto de densidades) e do logaritmo ser uma função bijetora.



## Método da Máx. Verossimilhança

- ***Por que maximizar a verossimilhança?***
- Suponha que temos uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma densidade qualquer, completamente conhecida exceto pelo parâmetro θ.
- Ao observarmos cada $x_i$, a densidade conjunta fica completamente especificada exceto pelo valor de θ. Então, por que não "chutar" para θ o valor que torna esta função um máximo?
- Este "chute" para θ é o valor que **mais concorda com os dados observados.**



## Exemplo 1 - MLE (Poisson)

- Suponha que obtemos uma amostra aleatória de tamanho 5 da distribuição Poisson com média θ.
- Os valores observados na amostra são: 0, 6, 1, 2 e 1.
- Então a função de probabilidade conjunta é:

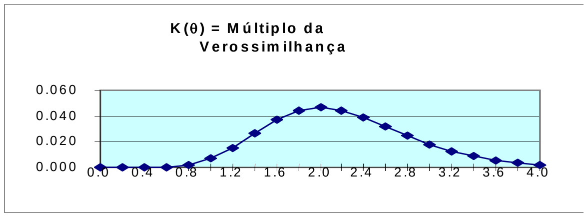
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = \frac{e^{-5\theta} e^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{5} x_i!}$$

$$L(\theta) = \frac{e^{-5\theta}\ \theta^{10}}{0!6!1!2!1!} = \frac{\theta^{10}\ e^{-5\theta}}{1440}$$



## Exemplo 1 - MLE (Poisson)

- Seja K(θ) = 1440.L(θ) = $\theta^{10} e^{-5\theta}$
- Podemos fazer um gráfico de K(θ) e ver qual o valor que aparentemente maximiza esta função, ou, alternativamente, fazer um gráfico de L(θ) ou l(θ). O gráfico de K(θ) é:




- O máximo aparente ocorre em θ = 2.

## Método da Máx. Verossimilhança

- Podemos confirmar se este valor realmente corresponde ao máximo através de técnicas simples do Cálculo.

- Lembre-se que uma condição necessária (mas não suficiente) para a existência de um máximo local é que a primeira derivada da função de interesse seja zero.

- Isso nos leva à idéia de "equação de máxima verossimilhança", discutida a seguir.



## Método da Máx. Verossimilhança

- Para maximizar L(θ), uma condição necessária é que sua primeira derivada seja igual a zero.

- Assim, *a equação de máxima verossimilhança* é:

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$$

- e esta equação deve ser resolvida, por métodos analíticos ou numéricos para θ.

- Para assegurar que a solução de dL/dθ = 0 seja realmente um máximo da verossimilhança, precisamos garantir que a segunda derivada seja $\leq 0$.



## Método da Máx. Verossimilhança

- A equação de máxima verossimilhança pode ser reescrita em termos da log-verossimilhança. Assim, é equivalente resolver:

$$\frac{d(\log \mathrm{L}(\theta))}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 0 \quad \text{para } \theta.$$

- O estimador obtido pela maximização da função de verossimilhança é chamado de *estimador de máxima verossimilhança* (MLE).

- Notação:
- Geralmente denotaremos o MLE por $\hat{\theta} = \mathrm{T}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_n)$



## Método da Máx. Verossimilhança

- *Atenção*
- Em muitos casos o estimador de máxima verossimilhança é único e pode ser obtido por métodos analíticos.

- Em outros casos, a equação de máxima verossimilhança dL/dθ = 0 (ou dl/dθ = 0) não nos dá o resultado correto e precisaremos encontrar o máximo da verossimilhança por outros métodos (por exemplo, graficamente)

## Exemplo 2 - MLE (Poisson)

- **Considere o exemplo 1. A log verossimilhança é:**

$$l(\theta) = -5.\theta + 10.\log\theta - \log(1440)$$

- **Derivando esta última expressão com relação a θ e igualando a zero leva a:**

$$\frac{dl}{d\theta} = 0 \rightarrow -5 + \frac{10}{\theta} = 0 \rightarrow -5.\theta = -10 \rightarrow \hat{\theta} = 2$$

- **é o estimador de máxima verossimilhança para θ.**

- **Compare este resultado com o exemplo 1. Este resultado <u>não</u> é mera coincidência.**



## Exemplo 3 (Bernoulli)

- **Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid Bernoulli(θ).**
- **A função de probabilidade de cada $X_i$ é:**

$$f(x_i,\theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \quad \theta \in (0,1),\ x_i = 0,1$$

- **A função de verossimilhança o produto das funções de probabilidade individuais, isto é:**

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i} =$$

$$= \theta^{n\bar{X}}(1-\theta)^{n-n\bar{X}} = \exp\left\{n\bar{X}.\log\theta + \left(n - n\bar{X}\right).\log(1-\theta)\right\}$$



## Exemplo 3 (Bernoulli)

- **A log verossimilhança é:**

$$l(\theta) = \log(L(\theta)) = (\sum x_i)\log\theta + (n - \sum x_i)\log(1-\theta) =$$

$$= n\bar{X}.\log\theta + (n - n\bar{X})\log(1-\theta)$$

- **Resolvendo a equação de verossimilhança leva a:**

$$\frac{dl}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{n\bar{X}}{\theta} - \frac{(n - n\bar{X})}{1-\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\theta)n\bar{X} = n\theta - n\bar{X}\theta \Leftrightarrow n\theta = n\bar{X}$$

- **E então o MLE para θ é a média amostral.**
- **Verifique que** $\left.\frac{d^2 l}{d\theta^2}\right|_{\theta = \bar{X}} < 0$
- **de tal forma que a média amostral realmente MAXIMIZA a verossimilhança.**



## Exemplo 4 (Normal)

- **Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid Normal(μ, 1), ou seja, uma amostra Normal com média desconhecida e variância conhecida (e suposta igual a um sem perda de generalidade).**

- **Mostre que o MLE de μ é a média amostral.**

## Exemplo 4 (Normal)

- A verossimilhança é:

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}(X_i-\mu)^2\right]=(2\pi)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right\}$$

- Note que a verossimilhança é máxima quando $Q(\mu)=\sum(X_i-\mu)^2$ é mínimo.
- Então é equivalente maximizar L(μ) ou minimizar Q(μ).



## Exemplo 4 (Normal)

$$Q(\mu)=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2\mu X_i+\mu^2\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\mu n\overline{X}+n\mu^2$$

- Derivando Q(μ) em relação a μ e igualando a zero nos leva a um ponto crítico:

$$\frac{dQ(\mu)}{d\mu}=0\rightarrow -2\sum_{i=1}^{n}X_i+2n\mu=0\Leftrightarrow\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i}X_i=\overline{X}$$

- Logo, o MLE de μ é a média amostral.



## Método dos Momentos

- É uma alternativa ao método de máxima verossimilhança para encontrar estimadores de maneira simples.
- Idéia Geral
- Igualar os momentos da distribuição aos momentos da amostra. Isso é razoável pois a distribuição empírica converge estocasticamente para a função de distribuição F(X).



## Método dos Momentos

- Considere uma amostra aleatória da distribuição com densidade $f(x,\theta_1,\theta_2,...,\theta_p)$ onde $(\theta_1,\theta_2,...,\theta_p)\in\Omega.$
- Seja $E(X^k)$ o k-ésimo momento da distribuição (k =1,2,...).
- Seja $M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ o k-ésimo momento amostral
- Faça $E(X^k) = M_k$ para k = 1,2,....
- Faça isto para quantos k's forem necessários até obter soluções únicas para os parâmetros desconhecidos

## Método dos Momentos

- Nota
- Uma formulação equivalente do método dos momentos usa os momentos centrais, igualando os momentos centrais da distribuição e da amostra até obter soluções únicas para todos os parâmetros desconhecidos.
- Ou seja, a outra formulação do método dos momentos é igualar:

$$E(X-\mu)^k = m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k \text{ para } k = 1,2.....$$

- Até encontrar uma solução única. Muitas vezes a resposta pelas duas formulações será igual.



## Método dos Momentos

- Na maneira dos casos práticos, os estimadores pelo método dos momentos são consistentes.
- O grande problema com este método é que ele não fornece estimadores únicos para um certo parâmetro.
- Por exemplo, se procuramos estimar a média e variância de uma distribuição é possível encontrar estimadores diferentes pelo método de momentos dependendo de quais momentos amostrais são igualados aos momentos da distribuição.



## Exemplo 5

- Vide a situação do exemplo 4. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ iid Normal($\mu$, 1), ou seja, uma amostra Normal com média desconhecida e variância conhecida (e suposta igual a um sem perda de generalidade).
- Mostre que o estimador por método de momentos de $\mu$ é também a média amostral.
- Neste caso, há apenas um parâmetro desconhecido e basta igualar o 1º. Momento da amostra ao 1º. Momento da população ($\mu$).