

CAPÍTULO 21 – ECONOMETRIA DE SÉRIES TEMPORAIS – CONCEITOS BÁSICOS

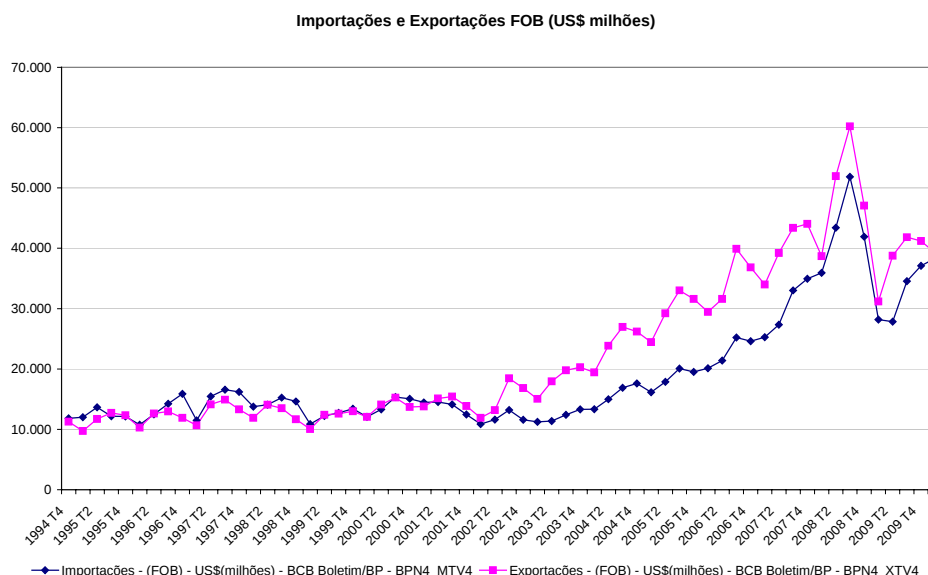
21.1. ALGUMAS SÉRIES TEMPORAIS BRASILEIRAS

Nesta seção apresentamos algumas séries econômicas, semelhantes às exibidas por Gujarati. A idéia é trabalhar também, neste capítulo, com dados nacionais.

Talvez a primeira coisa a fazer ao modelar uma série temporal é apresentar seu gráfico ao longo do tempo. Esta prática simples é importante, pois mostra se a série tem tendência e sazonalidade, se sua variabilidade aumenta ou diminui com o tempo, etc, o que fornece informações importantes sobre a estacionariedade (ou não) da série.

Por exemplo, a figura 1 a seguir mostra as importações e exportações brasileiras FOB ¹a partir do último trimestre de 1994 em milhões de dólares.

Figura 1

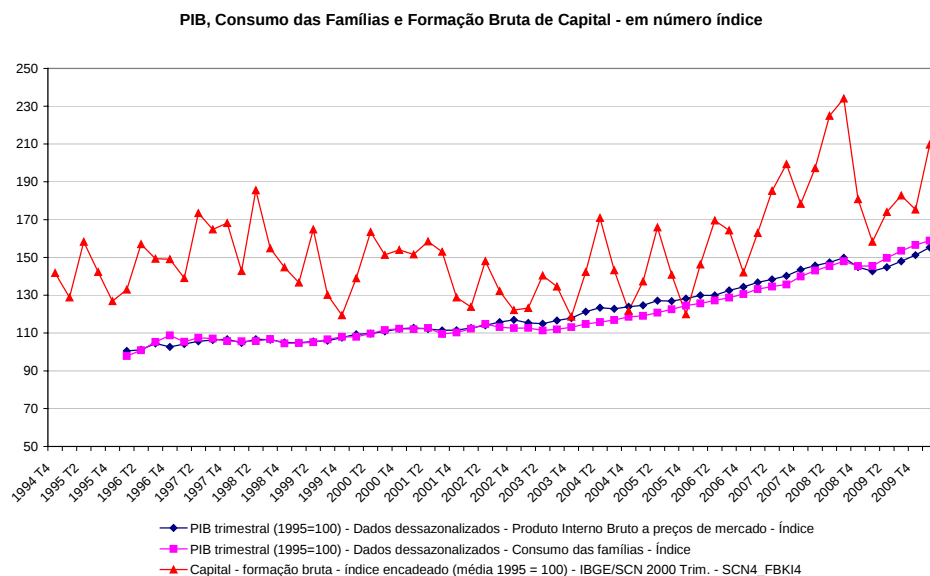


Nota-se claramente na figura 1 o aumento de ambas (importações e exportações) a partir de 2002. Também se percebe que o saldo da balança comercial foi quase “zerado” no fim do período (1º. trimestre de 2010).

¹ Nota: FOB = Free on Board. O vendedor é o responsável pelo desembaraço da mercadoria para **exportação**

A figura 2 exibe o PIB, o consumo das famílias e a formação bruta de capital, todos em número índice. No caso do PIB e do consumo das famílias, nota-se uma tendência de crescimento ao longo de quase todo o período apresentado. A formação bruta de capital (também em número índice), tem um comportamento bem mais errático.

Figura 2



21.2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Definição 21.1. (processo estocástico)

Um processo estocástico (ou processo aleatório) é uma coleção de variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidades geralmente representamos um processo estocástico por:

$\{X(t) : t \in T\}$ onde t normalmente representa o tempo (ou, em alguns casos, espaço).

$X(t)$ é chamado de **estado do processo no instante t** , e é uma variável aleatória. O conjunto T é o conjunto de índices, ou espaço paramétrico do processo estocástico. A “cara” deste espaço paramétrico nos permite separar os processos estocásticos em contínuos ou discretos, como na próxima definição.

Definição 21.2. (Processos Contínuos e Discretos)

Um processo estocástico $\{X(t) : t \in T\}$ é um **processo contínuo** (ou processo com parâmetro contínuo) se o conjunto T é um intervalo (finito ou infinito) de números reais. **Ao contrário, se o conjunto de índices T é um conjunto finito ou contável**, por exemplo, $T = \{1, 2, 3, \dots\}$ ou $T = \{1, 9, 43, 279\}$ dizemos que o processo estocástico é um **processo discreto** (ou processo com parâmetro discreto). Se o processo é discreto, freqüentemente mudamos a notação para X_t (ao invés de $X(t)$).

Logo, um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias ordenadas no tempo.

Em resumo:

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que descreve a evolução no tempo ou espaço de algum processo físico.

Aqui estaremos interessados apenas em processos discretos, nos quais o índice do tempo é $T = \{1, 2, \dots, N\}$.

Definição 21.3. (Série Temporal)

Uma Série Temporal é um conjunto de observações ordenadas no tempo (não necessariamente igualmente espaçadas), e que apresentam dependência serial (isto é, dependência entre instantes de tempo). A notação usada aqui para denotar uma Série Temporal é $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N$, que indica uma série de tamanho N . O instante N geralmente indica o último instante disponível.

De uma maneira um pouco mais formal, dizemos que **uma série temporal é uma realização de um processo estocástico**.

Uma **série temporal** $\{Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N\}$ pode ser encarada como uma **realização de um processo estocástico**. Para descrevermos completamente um processo estocástico precisamos especificar a distribuição conjunta do vetor $\{Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N\}$. Suponha que os Y_t 's são conjuntamente Gaussianos. Então, para conhecer a sua distribuição conjunta, basta especificar o vetor de médias $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$ e a matriz de variância-covariância Σ . Mas, Σ é uma matriz simétrica de dimensão N , e contém $N(N+1)/2$ elementos diferentes. Logo, a completa especificação deste processo

requer o conhecimento de $N + N(N+1)/2$ parâmetros. Podemos perceber claramente que inferir sobre todos estes parâmetros com base em apenas uma realização do processo é uma tarefa impossível, e portanto algumas simplificações devem ser feitas. **A hipótese simplificadora mais comum é estacionariedade.**

Definição 21.4. (Processo Estacionário)

Dizemos que um **processo** estocástico é **estacionário** se ele atingiu o equilíbrio. Em termos formais, num processo estacionário, a distribuição de probabilidade conjunta nos instantes $t_1, t_2, \dots, t_m$ é a mesma que a distribuição nos instantes $t_1 + k, t_2 + k, \dots, t_m + k$ para qualquer k , ou seja, um deslocamento de k unidades de tempo não afeta a distribuição de probabilidade conjunta. Note que, nesta definição, m é arbitrário.

Se tomarmos $m = 1$ acima, segue que, num processo estacionário, a distribuição marginal de Y_t é a mesma que a distribuição marginal de Y_{t+k} . Logo, a distribuição marginal de Y_t não depende do instante de tempo escolhido e, em particular, a média e variância de Y_t são constantes para qualquer t . Analogamente, se $m = 2$, as distribuições de probabilidade bivariadas $p(Y_t, Y_{t+k})$ não dependem de t , e então a covariância entre Y_t e Y_{t+k} depende apenas do “lag” k .

Em resumo, a condição de estacionariedade implica em:

- Média do processo é constante;
- Variância do processo é constante;
- Covariância entre Y_t e Y_{t+k} depende apenas do “lag” k .

Definição 21.5. (Processo Estacionário de 2ª. ordem ou fracamente estacionário)

Um processo é dito **fracamente estacionário (ou estacionário de 2ª. ordem)** se estas três condições são satisfeitas (**média constante, variância constante e covariância que só depende do “lag”**). Note que estas condições referem-se apenas aos dois primeiros momentos da distribuição de probabilidade dos Y_t 's, o que explica a terminologia “processo estacionário de 2ª. ordem”. A definição de estacionariedade mais geral envolve momentos de todas as ordens (m arbitrário na definição) e é muito mais complicada de verificar que a estacionariedade de segunda ordem. Se os Y_t 's são conjuntamente Gaussianos, as duas condições (estacionariedade “estrita” e estacionariedade de 2ª. ordem) são equivalentes.

O uso de estacionariedade fraca é tão comum que muitas vezes, ao nos referirmos a um processo como estacionário, o que temos em mente é um processo fracamente estacionário. Logo, por convenção, se nada for dito a respeito do tipo de estacionariedade de um processo, suponha que ele é fracamente estacionário!

Definição 21.6. (Autocovariância de “lag” k)

A autocovariância de “lag” k é definida como a covariância entre Y_t e Y_{t+k} isto é:

$$\gamma_k = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots$$

Note que $\gamma_0 = \text{Var}(Y_t) = \sigma^2$ pois $\text{Cov}(Y_t, Y_t) = \text{Var}(Y_t)$.

A autocovariância é uma das funções usadas na identificação da estrutura de um modelo ARIMA.

Definição 21.7. (Autocorrelação de “lag” k)

A autocorrelação de “lag” k é definida como:

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(Y_t, Y_{t+k})}{\text{Var}(Y_t)} = \frac{\gamma_k}{\sigma^2} \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots$$

Note que $\rho_0 = 1$ sempre.

As definições 21.6. e 21.7. referem-se à autocovariância e autocorrelação teóricas. Na prática, apenas observamos uma série temporal, e estas funções devem ser estimadas a partir da série. A seguir definimos a autocovariância e autocorrelações amostrais, isto é, calculadas a partir dos dados observados (ou seja, a partir da série temporal). Normalmente iremos nos referir à função de autocorrelação como ACF (do inglês, Autocorrelation Function).

Também, **pela estacionariedade do processo**, $\rho_k = \rho_{-k}$, e portanto basta fazer o gráfico para as autocorrelações com lags positivos. Este gráfico é chamado de **correlograma**.

Definição 21.8. (Autocovariância amostral de “lag” k)

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})$$

Note que, para o “lag” zero, esta expressão torna-se:

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (Y_t - \bar{Y})^2$$

que é a variância amostral da série.

Definição 21.9. (Autocorrelação amostral de “lag” k)

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (Y_t - \bar{Y}) \cdot (Y_{t+k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^N (Y_t - \bar{Y})^2}$$

Da expressão anterior segue que $r_0 = 1$ sempre!

Essas estimativas são assintoticamente não-tendenciosas quando N (o tamanho da série) $\rightarrow \infty$. Em geral deve-se ter $N \geq 50$ (e k , o número de defasagens, $\leq N/4$).

Fórmula de Bartlett

Sob a hipótese $\rho_k = 0$ para todo lag $k > U$ (onde U indica um lag “grande”) segue que:

$$\text{cov}(r_k, r_{k-s}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=-U+s}^U \rho_i \rho_{i-s}$$

Valores sucessivos de r_k podem exibir altas correlações. Fazendo $s = 0$ na equação anterior leva a:

$$\text{Var}(r_k) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=-U}^U \rho_i^2$$

Para N grande e sob a hipótese $\rho_k = 0$, a distribuição de r_k é *aproximadamente Normal* com média zero e variância $\frac{1}{N} \sum_{i=-U}^U \rho_i^2$. Na prática as correlações (desconhecidas) são substituídas na expressão acima por seus estimadores r_k e então:

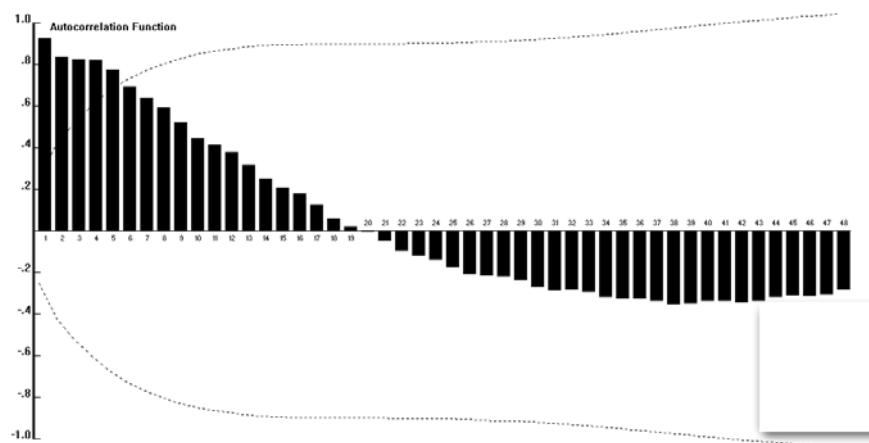
$$\text{Var}(r_k) \approx \frac{1}{N} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^U r_i^2 \right)$$

Esta fórmula será usada para obter intervalos de confiança para r_k . Também, se o tamanho (N) da série é grande, r_k é aproximadamente Normal com média zero, e os intervalos de confiança podem ser construídos a partir desta distribuição.

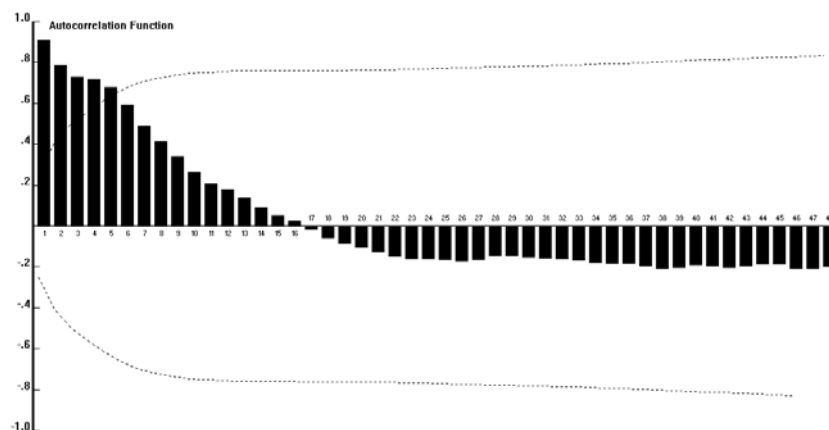
Exemplo

Considere as séries da figura 1. A seguir exibimos os gráficos das autocorrelações das três séries.

ACF da série de exportações



ACF da série de importações



Os correlogramas das duas séries têm uma característica em comum: o decaimento das autocorrelações é muito lento – nota-se que existem autocorrelações significantes até 5 trimestres antes para as duas séries.

O decaimento lento da função de autocorrelação é uma das características marcantes de séries não estacionárias.

Você verá, ao longo deste capítulo, uma grande preocupação a respeito da estacionariedade de uma série. Por que? Numa série não estacionária, a média (ou a variância, ou ambas) da série varia com o tempo, e neste caso só podemos estudar seu comportamento para o período disponível, ou seja, não é possível generalizar as conclusões para outros períodos de tempo.

Um exemplo clássico de série não estacionária é o passeio aleatório (“random walk”). Antes de defini-lo, precisamos recordar a noção de **ruído branco**. Um processo estocástico ε_t é um ruído branco se sua média é zero, sua variância é constante, e termos sucessivos não apresentam correlação serial em qualquer defasagem.

Podemos construir um passeio aleatório a partir de um ruído branco. É importante destacar que consideraremos dois “tipos” de passeio aleatório, com tendência e sem tendência.

Passeio aleatório sem deslocamento (“drift”)

A série Y_t é um passeio aleatório se:

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t \quad (21.3.4)$$

onde u_t é um ruído branco.

Esta é a equação de um processo AR(1) em que $\rho = +1$.

Esta equação é usada para modelar ativos financeiros quando acreditamos que a **hipótese de mercados eficientes** é válida. O que isso quer dizer? Que o preço de um ativo no instante t é o preço no instante anterior mais um erro de média zero, com variância constante, e que a previsão do preço do ativo amanhã é o preço de hoje, e assim não existe possibilidade de ganhos no mercado usando a informação das observações passadas.

Quais as implicações da equação (21.3.4)? Vamos escrevê-la a partir do instante inicial.

$$Y_1 = Y_0 + u_1$$

$$Y_2 = Y_1 + u_2 = Y_0 + u_1 + u_2$$

$$Y_3 = Y_2 + u_3 = Y_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

Se a observação inicial é Y_0 então, num instante qualquer t podemos escrever:

$$Y_t = Y_0 + \sum u_t \quad (21.3.5)$$

A média no instante t é:

$$E(Y_t) = E\left(Y_0 + \sum_{i=1}^t u_i\right) = Y_0 \quad (21.3.6)$$

Pois todos os u_t têm média zero. Ou seja, a média em qualquer instante é igual ao valor inicial, é uma constante.

A variância no instante t é:

$$\text{var}(Y_t) = t\sigma^2 \quad (21.3.7)$$

Isso decorre imediatamente da expressão (21.3.5), pois:

$$\text{var}(Y_t) = \text{var}\left(Y_0 + \sum_{i=1}^t u_i\right) = \text{var}\left(\sum_{i=1}^t u_i\right) = t \cdot \text{var}(u_1) = t \cdot \sigma^2$$

Note que, à medida que t aumenta, a variância de Y_t cresce indefinidamente, o que viola uma das condições de estacionariedade.

Uma das características do passeio aleatório sem deslocamento é a persistência dos choques aleatórios, isto é, o efeito de cada termo de erro u_t não se “dissipa” ao longo do tempo. Assim, podemos dizer que o passeio aleatório tem memória infinita, pois “guarda” a informação de todos os choques sofridos até o período corrente.

Uma característica importante do passeio aleatório sem deslocamento é: sua primeira diferença é um processo estacionário. Isso é fácil de verificar pois:

$$(Y_t - Y_{t-1}) = \Delta Y_t = u_t \quad (21.3.8)$$

Assim, se tentamos modelar uma série e ela se parece com uma random walk, uma boa idéia é tirar a primeira diferença da série e verificar se a série resultante é estacionária.

Passeio aleatório com deslocamento (“drift”)

A equação (21.3.4) é modificada da seguinte forma:

$$Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t \quad (21.3.9)$$

Onde δ é o parâmetro de deslocamento (“drift”). Por que deslocamento? Basta escrever a equação anterior em termos da primeira diferença:

$$Y_t - Y_{t-1} = \Delta Y_t = \delta + u_t \quad (21.3.10)$$

Y_t se desloca para cima ou para baixo dependendo de δ ser positivo ou negativo. A média e variância de Y_t são dadas por:

$$E(Y_t) = Y_0 + t \cdot \delta \quad (21.3.11)$$

$$\text{var}(Y_t) = t\sigma^2 \quad (21.3.12)$$

Destas equações notamos que nem a média nem a variância do processo são constantes, e assim o passeio aleatório com deslocamento é claramente não estacionário.

Exemplo – simulação de um passeio aleatório

Geramos 500 erros iid $N(0,1)$ e, a partir deles construímos duas séries de passeio aleatório, com e sem deslocamento, e com valor inicial $Y_0 = 100$. Os valores gerados estão na planilha `simulação_random_walk_capitulo_21.xls` e o usuário pode alterar o valor de δ e verificar o efeito sobre a série gerada. A figura 3 mostra o passeio aleatório SEM deslocamento e a figura 4 apresenta um passeio aleatório com drift = 0,2.

Figura 3

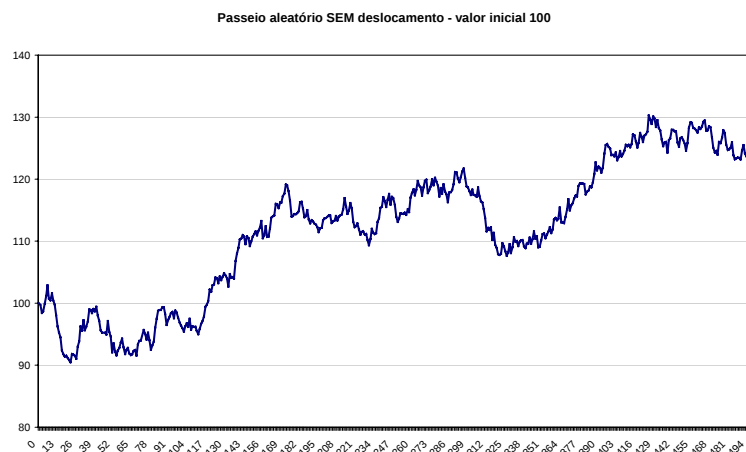
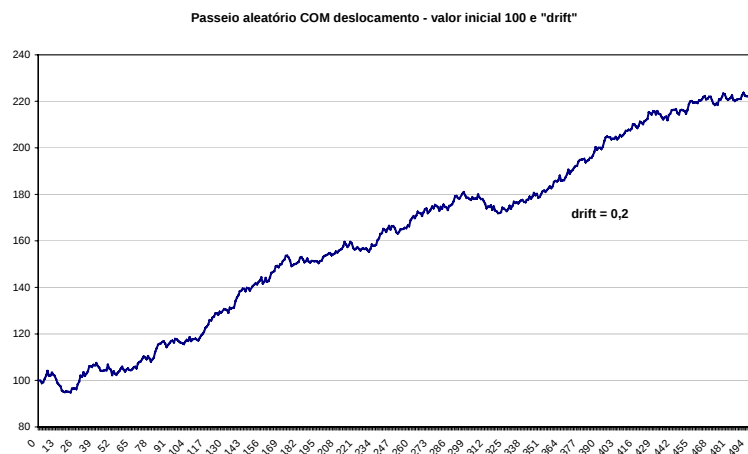


Figura 4



O passeio aleatório é um caso particular de processos estocásticos conhecidos como **processos de raiz unitária**.

Considere o modelo AR(1):

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t \quad -1 \leq \rho \leq 1 \quad (21.4.1)$$

O processo é um passeio aleatório sem deslocamento (e então é um processo não estacionário) quando $\rho = +1$. Se $\rho = -1$, o processo também é não estacionário (verifique!).

Se $|\rho| < 1$ o processo descrito por (21.4.1) é estacionário.

Definição 21.10. (Operador de atraso, "backward shift operator")

O operador de atraso B é definido como: $B.Y_t = Y_{t-1}$. Também, suas potências são dadas por:

$$B^k Y_t = Y_{t-k}.$$

O modelo AR(1) pode ser escrito em termos do operador de atraso, como:

$$(1-\rho.B)Y_t = u_t$$

O processo será estacionário se $|\rho| < 1$, ou seja, se a raiz de $1-\rho.B = 0$, que é $B=1/\rho$ estiver FORA do círculo unitário. O processo tem raiz unitária se $B = 1$, ou seja, se $\rho = 1$, indicando que o processo é uma random walk.

Assim, na prática é fundamental verificar se uma série tem raiz unitária, pois isso significa verificar se ela não é estacionária.

21.3. PROCESSOS ESTACIONÁRIOS NA TENDÊNCIA E ESTACIONÁRIOS NA 1ª. DIFERENÇA

Uma questão importante na modelagem de séries econômicas é verificar se a tendência de uma série é determinística ou estocástica.

Considere o seguinte modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \quad (21.5.1)$$

O passeio aleatório é um caso particular deste modelo em que $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ e $\beta_3 = 1$. O passeio aleatório com deslocamento é obtido fazendo-se $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 = 0$ e $\beta_3 = 1$. Podemos reescrever este processo em termos da 1ª. diferença e encontramos:

$$(Y_t - Y_{t-1}) = \Delta Y_t = \beta_1 + u_t \quad (21.5.3a)$$

β_1 é a tendência deste processo, e é denominada uma **tendência estocástica**. O processo (21.5.3a) é estacionário na 1ª. diferença, ou seja, a 1ª. diferença da série do passeio aleatório com deslocamento é uma série estacionária.

Se, na equação (21.5.1), $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$ e $\beta_3 = 0$, temos:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t \quad (21.5.4)$$

Este é um processo estacionário em tendência. Por que? Embora ele tenha média $\beta_1 + \beta_2 t$, que não é constante, sua variância é constante. O processo (21.5.4) tem uma **tendência determinística** $\beta_1 + \beta_2 t$ e **pode ser transformado num processo estacionário após a remoção da tendência**.

Passeio aleatório com deslocamento e tendência determinística

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + Y_{t-1} + u_t \quad (21.5.5)$$

Ao diferenciarmos a equação anterior encontramos:

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t \quad (21.5.5a)$$

A série de 1ª. diferença exibe uma tendência determinística. O processo Y_t é claramente não estacionário.

Tendência determinística com componente AR(1) estacionário

Considere o modelo abaixo no qual supomos que $\beta_3 < 1$.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \quad (21.5.6)$$

Y_t é uma série estacionária em torno de uma tendência determinística.

Exemplo – simulação

Na figura a seguir comparamos séries com tendência estocástica e determinística. Geramos 500 erros iid $N(0,1)$ e, a partir deles construímos duas séries, uma com tendência determinística e outra com tendência estocástica. Em ambos os casos o ponto inicial é $Y_0 = 100$.

As séries foram geradas da seguinte maneira:

- Tendência determinística: $Y_t = 0,2.t + u_t$
- Tendência estocástica: $Y_t = 0,2 + Y_{t-1} + u_t$

Na série com tendência determinística, os desvios em relação à linha de tendência são puramente aleatórios e não impactam o comportamento de longo prazo da série. Na série com tendência estocástica, o componente aleatório u_t afeta a trajetória de longo prazo da série.

