Exercícios - Capítulo 2

Problema 1

Tomou-se uma amostra de 1000 pessoas num shopping center com o objetivo de verificar a relação entre o número de cartões de crédito e a renda familiar (em salários mínimos). Os resultados obtidos estão na tabela a seguir .

Número de cartões → Renda ↓	Não tem cartão de crédito	1 cartão de crédito	mais de 1 cartão de crédito
até 10 S.M.	250	80	20
10 a 20 S.M.	100	200	40
20 a 30 S.M.	50	40	60
mais de 30 S.M.	20	40	100

Uma pessoa é escolhida ao acaso. Calcule as seguintes probabilidades :

a) De que a pessoa tenha renda em cada uma das 4 categorias.

b) Qual a probabilidade de uma pessoa não ter cartão de crédito ? Ter 1 cartão de crédito ? Ter mais de 1 cartão de crédito ?

c) Dado que a pessoa tem renda entre 10 e 20 S.M. , qual a probabilidade de que ela não tenha cartão de crédito ?

d) Dado que uma pessoa tem mais de 1 cartão de crédito, qual a probabilidade da sua renda familiar estar acima de 30 S.M. ?

e) Existe independência entre faixa de renda e o número de cartões de crédito ? Por que ?

Solução

a) Pr(renda até 10 S.M.) = (250+80+20)/1000 = 350/1000 = 0.35
   Pr(renda entre 10 e 20 S.M) = 340/1000 = 0.34
   Pr(renda entre 20 e 30 S.M) = 150/1000 = 0.15
   Pr(renda acima de 30 S.M.) = 160/1000 = 0.16

b) Pr(não ter cartão de crédito) = 420/1000 = 0.42
   Pr(1 cartão de crédito) = 0.36
   Pr(mais de 1 cartão de crédito) = 0.22

Nos itens c) e d) a seguir, lembre-se da definição de probabilidade condicional de um evento A dado um evento B, que é: $\Pr(A|B) = \Pr(A \cap B)/\Pr(B)$ (desde que o denominador não seja zero!).

c) Pr(não ter cartão | renda entre 10 e 20 S.M.) = 100/340 = 0.29

d) Pr(renda acima de 30 S.M. | mais de um cartão) = 100/220 = 0.45.

e) Lembre-se da definição de independência entre dois eventos: A e B são independentes se, e somente se: $\Pr(A \cap B) = \Pr(A).\Pr(B)$. Neste caso, para provar que renda familiar e número de cartões de crédito são independentes, precisamos verificar (para **todas** as células) que a probabilidade de cada célula na tabela dada é igual ao produto das probabilidades da respectiva linha e coluna em que a célula está situada. Mas, isso claramente não é verdade. Por exemplo, ao olharmos para a célula do canto inferior direito da tabela, observamos que:

Pr(mais de um cartão e renda acima de 30 S.M.) = 0.10, o que é claramente diferente do produto: Pr(mais de um cartão).Pr(renda acima de 30 S.M.) = (0.22).(0.16) = 0.035.

Logo, renda familiar e número de cartões de crédito são **dependentes**.

Problema 2

Os clientes de um banco têm como opção de investimento: poupança, CDB e fundos.

20 % dos clientes do banco têm caderneta de poupança,

5 % dos clientes do banco têm CDB,

25 % dos clientes do banco têm aplicações em fundos.

Para simplificar, suponha que estas 3 modalidades de investimento são exclusivas, isto é, o cliente só pode ter 1 tipo de investimento no banco.

O banco realizou uma pesquisa entre seus clientes para avaliar o interesse pelo lançamento de um novo tipo de seguro de vida.

Dado que o cliente aplica em poupança, 10 % destes se mostraram interessados no seguro. Dentre os clientes de CDB, 30 % se interessaram pelo seguro, e dentre os clientes dos fundos, 40 % demonstraram interesse pelo novo produto.

Um cliente do banco é selecionado aleatoriamente.

a) Qual a probabilidade dele se interessar pelo novo seguro de vida?

b) Dado que o cliente está interessado no novo seguro de vida, qual a probabilidade dele ser cliente em cada um dos 3 tipos de investimento (poupança, CDB e fundos)?

Suponha agora que o cliente pode ter diversas modalidades de investimento no banco . As probabilidades de um cliente ter **exclusivamente** poupança, CDB e fundos são, respectivamente, 20 %, 5 % e 25 %. Suponha também que as probabilidades de mais de 1 investimento estão distribuídas da seguinte maneira:

- Poupança e CDB - 10 % dos clientes,
- Poupança e Fundos - 10 % dos clientes,
- CDB e Fundos - 5 % dos clientes.

Nenhum cliente possui os 3 tipos de investimento simultaneamente. Calcule as seguintes probabilidades:

c) Do cliente não ter CDB?

d) Do cliente ter CDB e não ter poupança?

Solução

As seguintes probabilidades são dadas:

Pr(poupança) = 20%

Pr(CDB) = 5%

Pr(fundos) = 25%

E as modalidades de investimento são exclusivas, e então:

Pr(poupança $\cap$ CDB) = Pr(poupança $\cap$ fundos) = Pr(CDB $\cap$ fundos) = Pr(poupança $\cap$ CDB $\cap$ fundos) = 0.

Em termos do interesse por seguro de vida, são dadas as seguintes probabilidades condicionais:
Pr(Seguro| poupança) = 10%
Pr(Seguro| CDB) = 30%
Pr(Seguro| fundos) = 40%

a) A probabilidade de um cliente escolhido aleatoriamente se interessar pelo novo seguro de vida é a probabilidade do evento:
   seguro = (seguro $\cap$ CDB) $\cup$(seguro $\cap$ poupança) $\cup$(seguro $\cap$ fundos) (1)

Note que as 3 opções de investimento (CDB, poupança e fundos) formam uma *partição* do universo de clientes do banco, pois a união dos clientes em cada uma destas categorias forma o universo de clientes e a interseção destas 3 categorias é nula (quanto tomadas duas a duas ou em conjunto). Isso nos permite escrever o evento "interesse por seguro" como a união dos eventos mostrada acima. Também, é importante notar que a probabilidade de cada uma das interseções indicadas pode ser escrita em termos de uma probabilidade condicional e uma incondicional, como mostraremos a seguir.

Pr(seguro $\cap$ CDB) = Pr(seguro | CDB).Pr(CDB)
E analogamente para Pr(seguro $\cap$ poupança) e Pr(seguro $\cap$ fundos).

Também, a união de eventos dada pela expressão (1) é uma união de eventos mutuamente exclusivos e portanto sua probabilidade é apenas a soma das probabilidades dos eventos que compõem a união.

Após levarmos tudo isso em consideração, a probabilidade desejada torna-se:
Pr(seguro) = Pr(seguro $\cap$ CDB) +Pr(seguro $\cap$ poupança) +Pr(seguro $\cap$ fundos)
Pr(seguro) = Pr(seguro | CDB).Pr(CDB) +Pr(seguro | poupança).Pr(poupança)+
+Pr(seguro | fundos).Pr(fundos)

Pr(seguro) = (30%)(5%) + (10%)(20%) + (40%)(25%) = 0.135 = 13.5%

b) Este ítem representa uma aplicação direta do teorema de Bayes. Agora restringimos o universo de clientes do banco apenas aos clientes que têm interesse no novo seguro, e precisamos obter as probabilidades condicionais do cliente ter aplicações em cada categoria.

Especificamente, desejamos calcular: Pr(CDB | seguro), Pr(poupança | seguro) e Pr(fundos | seguro).

Pela definição de probabilidade condicional:
Pr(CDB | seguro) = Pr(seguro $\cap$ CDB)/Pr(seguro) =

= Pr(seguro | CDB).Pr(CDB)/Pr(seguro) = (30%)(5%)/(13.5%) = 11.1%

Analogamente:

Pr(poupança | seguro) = (10%)(20%)/(13.5%) = 14.8%

Pr(fundos | seguro) = (40%)(25%)/(13.5%) = 74.1%

c) Agora a solução fica um pouco mais complicada, pois as 3 categorias de investimento (CDB, poupança e fundos) não são mutuamente exclusivas.

As seguintes probabilidades são dadas:

Pr(poupança $\cap$ CDB) = 10%

Pr(poupança $\cap$ fundos) = 10%

Pr(CDB $\cap$ fundos) = 5%

Pr(poupança $\cap$ CDB $\cap$ fundos) = 0

Pr(só ter poupança) = 20%

Pr(só ter CDB) = 5%

Pr(só ter fundos) = 25%

O evento {não ter CDB} é equivalente ao evento: {ter apenas poupança OU ter apenas fundo OU ter poupança e fundo}, e assim a probabilidade desejada é:

Pr{não ter CDB} = Pr(só poupança) + Pr(só fundos) + Pr(poupança $\cap$ fundos) = 20% + 25% + 10% = 55%

d) O evento {ter CDB e não ter poupança} é equivalente ao evento: {só CDB} $\cup${ CDB e fundo} e sua probabilidade é 5% + 5% = 10%.

Problema 3

Um estado tem 3 milhões de veículos cadastrados e pretende-se mudar o esquema de licenciamento, passando a usar placas com 6 símbolos, dos quais os 3 primeiros são letras e os outros 3 são dígitos. Este esquema é viável, isto é, neste esquema conseguimos identificar cada um dos veículos registrados no estado?

Solução

Considere o alfabeto tem 27 letras (incluímos K, W e Y).

O número de placas diferentes que podem ser formadas por 3 letras é:

$$A_{3,27} = \frac{27!}{24!}$$

Analogamente, o número de placas diferentes que podem ser formadas por 3 algarismos é:

$$A_{3,10} = \frac{10!}{7!}$$

Pelo princípio da multiplicação, o número de veículos que podem ser identificados por este esquema de 6 dígitos (3 primeiras posições são letras e os outros 3 caracteres são números) é:

$A_{3,27}.A_{3,10} = \frac{27!}{24!}.\frac{10!}{7!} = 12,636,000$ ou seja, aproximadamente 4 vezes o número total de veículos existente. Logo, pelo menos a médio prazo, este esquema deve ser apropriado para identificar o número de veículos no estado.

Problema 4

Um supermercado passou a funcionar 24 horas por dia e o seu gerente precisa dividir os empregados em turnos, e precisa determinar de quantas maneiras ele pode dividir os empregados que irão trabalhar no primeiro turno. Existem 10 funcionários capazes de trabalhar como caixas, 12 aptos a serem empacotadores e 8 faxineiros. Se um turno requer 5 caixas, 5 empacotadores e 3 faxineiros, de quantas maneiras pode-se dividir os empregados que irão trabalhar num turno?

Solução

Dos 10 funcionários aptos a serem caixas, precisamos escolher 5. Existem $C_{5,10} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!}$ maneiras de selecionar estes funcionários. Analogamente, existem $C_{5,12} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5!7!}$ maneiras de selecionar empacotadores, e $C_{3,8} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!}$ formas de escolher os faxineiros. Pelo princípio da multiplicação, existem:

$\binom{10}{5}\binom{12}{5}\binom{8}{3} = 11.176.704$ maneiras de alocar os funcionários.

Problema 5

Uma empresa de seguro saúde precisa montar um esquema de revezamento entre seus funcionários. A empresa quer saber quantas equipes de atendimento em ambulância pode formar, sabendo que cada equipe é constituída por 1 motorista, 1 médico e 2 enfermeiros. A empresa conta nos seus quadros com 20 motoristas, 8 médicos e 25 enfermeiros.

Solução

Veja a solução do problema anterior.

Existem $\binom{20}{1} = 20$ maneiras de escolher um motorista, $\binom{8}{1} = 8$ formas de selecionar um médico e $\binom{25}{2} = \frac{25(24)}{2} = 300$ maneiras de escolher um enfermeiro. Logo, a empresa poderá formar 20(8)(300) = 48.000 equipes.

Problema 6

Uma pequena empresa de consultoria decide premiar seus funcionários mais jovens (com menos de 3 anos de emprego) com um curso de treinamento no exterior. Existem 15 funcionários com menos de 3 anos de emprego, dos quais 10 são homens e 5 mulheres. 4 funcionários serão enviados para o treinamento no exterior.

a) Neste grupo de 15 empregados, quantos subconjunto de 4 pessoas podem ser formados?

b) Quantos subconjuntos de 4 pessoas podem ser formados incluindo exatamente 2 homens?

Solução

a) Pode-se formar $\binom{15}{4} = 1365$ subconjuntos de 4 pessoas.

b) Existem $\binom{10}{2} = 45$ grupos com 2 homens e $\binom{5}{2} = 10$ grupos contendo 2 mulheres. Assim, podemos formar 45(10) = 450 subconjuntos de 4 pessoas contendo exatamente 2 homens.

Problema 7

Você está numa sessão de cinema na qual ocorre uma promoção de um provedor Internet, que está dando 6 meses de acesso gratuito. Existem 80 pessoas no cinema, das quais apenas 30 possuem computador e portanto poderiam estar interessadas nesta promoção. O provedor seleciona aleatoriamente 5 espectadores. Qual a probabilidade de 3 ou mais espectadores se interessarem pela promoção (isto é, 3 ou mais terem computador)?

Solução

N = 80 pessoas = tamanho da "população"

r = 30 pessoas possuidoras de computador

n = 5 = tamanho da amostra

X = número de pessoas na amostra que possuem computador

Desejamos encontrar Pr(X ≥ 3) = 1 – Pr(X < 3) = 1 – Pr(X = 0) – Pr(X = 1) – Pr(X = 2).

Note que a amostragem é sem reposição, e portanto devemos calcular as probabilidades pela fórmula hipergeométrica. Neste caso:

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{30}{x}\binom{50}{5-x}}{\binom{80}{5}}$$

e os valores destas probabilidades estão na próxima tabela:

x	Pr(X=x)
0	8,81%
1	28,74%
2	35,47%

Logo: Pr(X ≥ 3) = 1 – 73.02% = 26.98%

Problema 8

Uma concessionária de automóveis está fazendo uma grande promoção de vendas no próximo final de semana. A empresa conta com 12 vendedores, dos quais 4 são mulheres. A concessionária estará aberta no final de semana em esquema de plantão, e precisará de 8 vendedores, dos quais 2 obrigatoriamente são mulheres. Quantas equipes de vendedores podem ser formadas para o plantão?

Solução

Vamos precisar de 8 vendedores, dos quais 2 são mulheres.

Logo, deve-se selecionar 6 dentre os 8 homens e 2 dentre as 4 mulheres, e assim existem $\binom{8}{6}\binom{4}{2} = (28).(6) = 168$ possíveis equipes.

Problema 9

Um posto de gasolina localizado numa estrada tem 20 bombas de combustível. O posto vende 5 tipos de combustível: diesel, álcool, gasolina comum, gasolina aditivada e gasolina premium. As duas bombas situadas mais perto da estrada devem conter, obrigatoriamente, diesel, pois do contrário os caminhões que se abastecem de diesel não teriam espaço para manobrar. Um arquiteto é contratado para fazer uma reforma no posto e precisa saber quais as possíveis disposições das bombas.

a) Quantas disposições de bombas existem se: 2 bombas vendem álcool e as 16 restantes vendem gasolina (não importa de que tipo).

b) Quantas disposições de bombas existem se: 2 bombas vendem álcool, 8 vendem gasolina comum, 5 vendem gasolina aditivada e as 3 restantes vendem gasolina premium.

Problema 10

Numa vila pode-se estacionar 6 carros em vagas numeradas, todas do mesmo lado da rua e em seqüência. De quantas maneiras pode-se estacionar os carros nestas vagas? Supondo que, a cada noite, as pessoas estacionam seus carros numa ordem diferente, quantos dias serão necessários para que a seqüência dos carros se repita?

Solução

Pode-se gerar 6! = 720 seqüências de carros.

A seqüência de carros será repetida em 5! = 120 dias.

Problema 11

Um conjunto de 40 fusíveis é produzido e depois inspecionado usando-se o procedimento descrito a seguir: toma-se uma amostra aleatória de 5 fusíveis. Se pelo menos 4 destes fusíveis "desarmam" na amperagem correta, o lote de 40 fusíveis é aceito. Do contrário o lote é rejeitado.

Suponha que existem 8 fusíveis defeituosos dentre os 40 produzidos.

Qual a probabilidade do lote ser aceito:

a) Usando-se amostragem sem reposição (Hipergeométrica)

b) Usando-se amostragem com reposição (Binomial)

Solução

Para que o lote seja aceito, no máximo um fusível do lote será defeituoso (em outras palavras, podem existir zero ou um fusíveis defeituosos no lote). Seja X o número de fusíveis defeituosos encontrado no lote. Precisamos calcular a probabilidade de que X seja menor ou igual a 1, isto é, Pr(X = 0) + Pr(X = 1).

a) Supondo amostragem sem reposição, as probabilidades dos diversos valores de X devem ser calculadas usando a fórmula da distribuição Hipergeométrica, isto é:

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{8}{x}\binom{32}{5-x}}{\binom{40}{5}}$$

Neste caso devemos avaliar estas probabilidades com X = 0 e X = 1, o que nos leva aos seguintes resultados:

$$\Pr(X = 0) = \frac{\binom{8}{0}\binom{32}{5}}{\binom{40}{5}} = \frac{201376}{658008} = 30.6\% \quad \text{e} \quad \Pr(X = 1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{32}{4}}{\binom{40}{5}} = \frac{287680}{658008} = 43.72\%$$

Então, a probabilidade do lote ser aceito é Pr(X ≤1) = 30.6% + 43.72% = 74.32%.

b) Agora usamos a fórmula Binomial para calcular as probabilidades desejadas. O restante da argumentação permanece igual. Aqui (amostragem COM reposição) a probabilidade de x fusíveis com defeito no lote é:

$$\Pr(X = x) = \binom{5}{x}(0.2)^x (0.8)^{5-x}$$

Pela aplicação direta da fórmula anterior verificamos que a probabilidade de 0 fusíveis defeituosos é $(0.8)^5$ e a probabilidade de um fusível com defeito é $(0.8)^4$. Assim, a probabilidade do lote ser rejeitado é 73.73%.

Problema 12

4 máquinas (M_1, M_2 , M_3 e M_4) são usadas para fabricar o mesmo tipo de produto. Suponha que :

20 % dos produtos são fabricados por M_1
25 % dos produtos são fabricados por M_2
25 % dos produtos são fabricados por M_3
30 % dos produtos são fabricados por M_4

Suponha também que:
2 % dos produtos feitos por M_1 têm defeito,
2 % dos produtos feitos por M_2 têm defeito,
3 % dos produtos feitos por M_3 têm defeito,
5% dos produtos feitos por M_4 têm defeito.

Um produto é selecionado aleatoriamente e é defeituoso. Qual a probabilidade dele ter sido produzido por M_1? E por M_2? E por M_3? E por M_4?

Solução

Esta é uma aplicação imediata do Teorema de Bayes. Note que as máquinas formam uma partição do espaço amostral pois:

- todos os produtos são feitos por alguma das 4 máquinas;
- se um produto é feito por uma máquina, não pode ter sido feito por qualquer das outras.

Seja D o evento: { o produto é defeituoso} e M_1, M_2, M_3, M_4 representam as probabilidades do produto ter sido fabricado pela máquina 1, 2, 3 ou 4 (respectivamente). As seguintes probabilidades são fornecidas: $\Pr(M_1) = 20\%$, $\Pr(M_2) = 25\%$, $\Pr(M_3) = 25\%$ e $\Pr(M_4) = 30\%$. Também, do enunciado sabemos que a probabilidade condicional do produto ter defeito sabendo que ele foi produzido por cada uma das máquinas é conhecida, e: $\Pr(D \mid M_1) = 2\%$, $\Pr(D \mid M_2) = 2\%$, $\Pr(D \mid M_3) = 3\%$, $\Pr(D \mid M_4) = 5\%$.

Sabendo que o produto é defeituoso, desejamos encontrar a probabilidade dele ter sido produzido por cada uma das máquinas, isto é, buscamos as probabilidades condicionais $\Pr(M_i \mid D)$ onde i =1, 2, 3, 4. Mas:

$$\Pr(M_i|D) = \frac{\Pr(D|M_i).\Pr(M_i)}{\Pr(D)} = \frac{\Pr(D|M_i).\Pr(M_i)}{\sum_{j=1}^{4}\Pr(D|M_j).\Pr(M_j)}$$

Substituindo os valores dados no enunciado do problema temos:

$$\Pr(M_1|D) = \frac{\Pr(D|M_1).\Pr(M_1)}{\Pr(D|M_1).\Pr(M_1)+\Pr(D|M_2).\Pr(M_2)+\Pr(D|M_3).\Pr(M_3)+\Pr(D|M_4).\Pr(M_4)} =$$

$$= \frac{(2\%)(20\%)}{(2\%)(20\%)+(2\%)(25\%)+(3\%)(25\%)+(4\%)(30\%)} = \frac{40/10000}{(40+50+75+150)/10000} = \frac{40}{315} = 12.70\%$$

$$\Pr(M_2|D) = \frac{50/10000}{(40+50+75+150)/10000} = \frac{50}{315} = 15.87\%$$

$$\Pr(M_3|D) = \frac{75/10000}{(40+50+75+150)/10000} = \frac{75}{315} = 23.81\%$$

$$\Pr(M_4|D) = \frac{150/10000}{(40+50+75+150)/10000} = \frac{150}{315} = 47.62\%$$

Note que, implicitamente, calculamos a probabilidade de um produto escolhido aleatoriamente ser defeituoso, e ela é: $\Pr(D) = 315/10000 = 3.15\%$.

Problema 13

Uma empresa de crédito precisa saber como a inadimplência está distribuída entre seus clientes. Sabe-se que :

10 % dos clientes pertencem à classe A.
20 % dos clientes pertencem à classe B.
30 % dos clientes pertencem à classe C.
40 % dos clientes pertencem à classe D.

Dentre os clientes da classe A, 5 % estão inadimplentes.
Dentre os clientes da classe B, 8 % estão inadimplentes.
Dentre os clientes da classe C, 10 % estão inadimplentes.
Dentre os clientes da classe D, 2 % estão inadimplentes.
Um cliente é escolhido aleatoriamente e está inadimplente. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes ?

Solução

Esta é também (vide exemplo anterior) uma aplicação direta do Teorema de Bayes. A partição é, neste caso, formada pelas classes sócio-econômicas.

Seja I o evento: {o cliente está inadimplente}. Então procuramos encontrar Pr(A| I), Pr(B| I), Pr(C| I) e Pr(D| I).

$$\Pr(A|I)=\frac{\Pr(I|A).\Pr(A)}{\Pr(I|A).\Pr(A)+\Pr(I|B).\Pr(B)+\Pr(I|C).\Pr(C)+\Pr(I|D).\Pr(D)}=$$

$$=\frac{(5\%)(10\%)}{(5\%)(10\%)+(8\%)(20\%)+(10\%)(30\%)+(2\%)(40\%)}=\frac{50/10000}{(50+160+300+80)/10000}=\frac{50}{590}=8.47\%$$

Analogamente:

$$\Pr(B|I)=\frac{160/10000}{(50+160+300+80)/10000}=\frac{160}{590}=27.12\%$$

$$\Pr(C|I)=\frac{300/10000}{(50+160+300+80)/10000}=\frac{300}{590}=50.85\% \text{ e}$$

$$\Pr(C|I)=\frac{80/10000}{(50+160+300+80)/10000}=\frac{80}{590}=13.56\%$$

Obviamente a soma destas probabilidades condicionais é 100%. Também, no processo de cálculo, indiretamente calculamos que a probabilidade de uma pessoa escolhida aleatoriamente dentro do conjunto de clientes estar inadimplente é 320/10000 = 3.2%.

Problema 14

Uma caixa contém 8 bolas brancas e 6 bolas azuis. Uma bola é selecionada aleatoriamente e então é jogada fora e substituída por uma bola da cor oposta.

a) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja branca?

b) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja azul?

Solução

a) Seja A_i o evento: {bola azul encontrada na i-ésima retirada}. Note que o evento B_i = {bola branca encontrada na i-ésima retirada} é apenas o complemento de A_i.

Pela composição inicial das bolas na caixa, é claro que: $\Pr(A_1) = 6/14$ e $\Pr(B_1) = 8/14$.

O evento B_2 (bola branca na 2ª. retirada) pode ser escrito como:
$B_2=(B_2\cap A_1)\cup(B_2\cap B_1)$ onde $(B_2\cap B_1)$ é o evento {bolas brancas nas 2 primeiras retiradas} e $(B_2\cap A_1)$ indica {bola azul na 1ª. retirada e branca na 2ª. retirada}. Também é importante notar que $(B_2\cap A_1)$ e $(B_2\cap B_1)$ são mutuamente exclusivos, o que facilita o cálculo da probabilidade desejada. As probabilidades dos eventos $(B_2\cap A_1)$ e $(B_2\cap B_1)$ podem ser encontradas a partir das probabilidades condicionais do que aconteceu na 2ª. retirada dado o que foi observado na 1ª. retirada.

Suponha que a 1ª. retirada tenha resultado numa bola azul. Então, ANTES da 2ª. retirada, a caixa contém 9 bolas brancas e 5 bolas azuis. Se a 1ª. retirada consistiu numa bola branca, ANTES da 2ª. retirada, a caixa contém 7 bolas brancas e 7 bolas azuis.

Então, as probabilidades condicionais de uma bola branca na 2ª. retirada sabendo o que aconteceu na 1ª. retirada são trivialmente fáceis de calcular, basta apenas pensar na composição da caixa após a 1ª. retirada (mas antes da 2ª. retirada). Especificamente: $\Pr(B_2 \mid A_1) = 9/14$ e $\Pr(B_2 \mid B_1) = 7/14$.

Pela definição de probabilidade condicional:

$$\Pr(B_2 \cap B_1) = \Pr(B_2|B_1).\Pr(B_1) = \frac{7}{14}.\frac{8}{14} = \frac{56}{196} = 28.57\%$$

e também:

$$\Pr(B_2 \cap A_1) = \Pr(B_2|A_1).\Pr(B_1) = \frac{9}{14}.\frac{6}{14} = \frac{54}{196} = 27.55\%$$

Finalmente:

$$\Pr(B_2) = \Pr(B_2 \cap A_1) + \Pr(B_2 \cap B_1) = \frac{56+54}{196} = 56.12\%$$

b) O evento A_2 (bola azul na 2ª. retirada) pode ser escrito como:
$A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap B_1)$ onde $(A_2 \cap A_1)$ representa o evento {bolas azuis nas 2 primeiras retiradas} e $(A_2 \cap B_1)$ significa {bola branca na 1ª. retirada e azul na 2ª. retirada}. Pelos mesmos argumentos que no ítem anterior: $\Pr(A_2 \mid A_1) = 5/14$ e $\Pr(A_2 \mid B_1) = 7/14$. Logo, a probabilidade de uma bola azul na 2ª. retirada é:

$$\Pr(A_2) = \Pr(A_2 \cap A_1) + \Pr(A_2 \cap B_1) = \Pr(A_2|A_1).\Pr(A_1) + \Pr(A_2|B_1).\Pr(B_1) = \frac{5}{14}.\frac{6}{14} + \frac{7}{14}.\frac{8}{14} = \frac{86}{196} = 43.88\%$$

Neste caso existe uma solução MUITO MAIS FÁCIL. Como só existem bolas de 2 cores, então é óbvio que a probabilidade de uma bola azul na 2ª. retirada é apenas 1 menos a probabilidade de uma bola branca na 2ª. retirada, ou seja: 1 – 110/196 = 86/196!

Problema 15

Uma fábrica de chips de computador considera aceitável que 3% dos chips produzidos sejam defeituosos. Para verificar se o processo de produção está "sob controle" toma-se um lote de 30 chips e verifica-se o estado destes chips ***a partir de uma amostra de 5 chips***. Se ***no máximo 1 chip*** na amostra apresenta defeito, a empresa admite que a produção dos chips está sob controle, e continua a produzí-los sem alterações. Do contrário, ***se mais de um chip*** na amostra apresenta defeito, a empresa pára a produção por que supõe que o controle de qualidade do processo produtivo não é adequado. ***Suponha que existem, na verdade, 3 chips defeituosos no lote de 30 chips***. Qual a probabilidade da empresa parar a produção, supondo que:

a) A amostragem é feita com reposição (Binomial).

b) A amostragem é feita sem reposição (Hipergeométrica).

Solução

Veja a solução do problema 11, que é bastante parecido com este.

Neste caso:

N = 30 = tamanho da "população"

n = 5 = tamanho da amostra

p = 3/30 = 0.10 = proporção de chips com defeito na população

X = número de chips com defeito na amostra. Pára-se a produção de X é maior que 1.

Portanto, a produção é encerrada se X > 1, e a probabilidade disso acontecer é:

Pr(X > 1) = Pr(X = 2) + Pr(X = 3) + Pr(X = 4) + Pr(X = 5)

Mas, é muito mais fácil calcular isso usando o evento complementar, e assim:

Pr(X > 1) = 1 – Pr(X ≤ 1) = 1 - Pr(X =0) - Pr(X = 1)

a) Se supomos amostragem com reposição, as probabilidades anteriores devem ser calculadas pela fórmula Binomial usando n = 5 e p = 3/30 = 0.10, e assim:

$$\Pr(X>1)=1-\Pr(X=0)-\Pr(X=1)=1-\binom{5}{0}(0.1)^0(0.9)^5-\binom{5}{1}(0.1)^1(0.9)^4=1-(0.9)^5-(0.5)(0.9)^4=8.15\%$$

b) Agora, supondo amostragem sem reposição, devemos usar as probabilidades Hipergeométricas e então:

$$\Pr(X>1)=1-\Pr(X=0)-\Pr(X=1)=1-\frac{\binom{3}{0}\binom{27}{5}}{\binom{30}{5}}-\frac{\binom{3}{1}\binom{27}{4}}{\binom{30}{5}}=100\%-56.65\%-36.95\%=6.40\%$$

Dica: O Excel tem diversas funções bastante úteis. Por exemplo, a função COMBIN(k;n) fornece o coeficiente binomial $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ usado freqüentemente neste capítulo.

Problema 16

0.1 % da população de uma cidade tem tuberculose. Um teste para detectar esta doença tem as seguintes propriedades:

- Se a pessoa **tem** tuberculose o resultado do teste é positivo com probabilidade 0.999 (o teste "acerta").

- Se a pessoa **não tem** tuberculose existe uma probabilidade de 0.002 do resultado do teste ser positivo e acusar a doença.

Uma pessoa é selecionada aleatoriamente na população e o resultado do teste é positivo, indicando a presença da doença. Qual a probabilidade de que a pessoa realmente tenha a doença.

Solução

Esta é outra aplicação direta do teorema de Bayes.

Seja P o evento: { o resultado do teste é positivo} e T o evento: {a pessoa tem tuberculose}.

As seguintes probabilidades são dadas:

Pr(T) = 0.1%

Pr(P | T) = 0.999 = 99.9% (probabilidade do exame detectar a doença)

$\Pr\left(P\middle|\overline{T}\right)=0.002=0.2\%$ (probabilidade de alarme falso!)

Desejamos encontrar: Pr(T | P).

Note que, pela definição de probabilidade condicional:

$$\Pr(T|P)=\frac{\Pr(T\cap P)}{\Pr(P)}=\frac{\Pr(P|T).\Pr(T)}{\Pr(T\cap P)+\Pr(\overline{T}\cap P)}=\frac{\Pr(P|T).\Pr(T)}{\Pr(P|T).\Pr(T)+\Pr(P|\overline{T}).\Pr(\overline{T})}=$$

$$=\frac{(99.9\%)(0.1\%)}{(99.9\%)(0.1\%)+(0.2\%)(99.9\%)}=\frac{1}{3}$$

Problema 17

Uma caixa contém 10 bolas brancas e 8 bolas azuis. Uma bola é selecionada aleatoriamente e então é jogada fora e substituída por **duas** bolas da cor oposta.

a) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja branca?

b) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja azul?

Solução

Veja o problema 14, mas lembre-se agora que, ao selecionarmos uma bola, ela é jogada fora e substituída por **duas** bolas da cor oposta, e então o número de bolas na caixa aumenta a cada seleção! Usaremos a mesma notação que no problema 14.

Seja A_i o evento: {bola azul encontrada na i-ésima retirada}. Note que o evento B_i = {bola branca encontrada na i-ésima retirada} é apenas o complemento de A_i.

Pela composição inicial das bolas na caixa: $\Pr(A_1) = 8/18$ e $\Pr(B_1) = 10/18$.

O evento B_2 (bola branca na 2ª. retirada) pode ser escrito como:
$B_2=(B_2\cap A_1)\cup(B_2\cap B_1)$ onde $(B_2\cap B_1)$ é o evento {bolas brancas nas 2 primeiras retiradas} e $(B_2\cap A_1)$ indica {bola azul na 1ª. retirada e branca na 2ª. retirada}. Os eventos $(B_2\cap A_1)$ e $(B_2\cap B_1)$ são mutuamente exclusivos, o que facilita o cálculo da probabilidade desejada. As probabilidades dos eventos $(B_2\cap A_1)$ e $(B_2\cap B_1)$ podem ser encontradas a partir das probabilidades condicionais do que aconteceu na 2ª. retirada dado o que foi observado na 1ª. retirada.

Suponha que a 1ª. retirada tenha resultado numa bola azul. Então, depois da 1ª. retirada e ANTES da 2ª. retirada, a caixa contém 19 bolas, das quais 12 são brancas e 7 azuis. Se a 1ª. retirada consistiu numa bola branca, depois da 1ª. retirada e ANTES da 2ª. retirada, a caixa contém 9 bolas brancas e 10 bolas azuis.

Então, as probabilidades condicionais de uma bola branca na 2ª. retirada sabendo o que aconteceu na 1ª. retirada são trivialmente fáceis de calcular, basta apenas pensar na composição da caixa após a 1ª. retirada (mas antes da 2ª. retirada). Especificamente: $\Pr(B_2 \mid A_1) = 12/19$ e $\Pr(B_2 \mid B_1) = 9/19$.

Pela definição de probabilidade condicional:

$$\Pr(B_2\cap B_1)=\Pr(B_2|B_1).\Pr(B_1)=\frac{9}{19}.\frac{10}{18}=\frac{90}{342}=26.32\%$$

e também:

$$\Pr(B_2\cap A_1)=\Pr(B_2|A_1).\Pr(B_1)=\frac{12}{19}.\frac{8}{18}=\frac{96}{342}=28.07\%$$

Finalmente:

$$\Pr(B_2) = \Pr(B_2 \cap A_1) + \Pr(B_2 \cap B_1) = \frac{90+96}{342} = 54.39\%$$

b) O evento A_2 (bola azul na 2ª. retirada) é apenas o complemento do evento {bola branca na 2ª. retirada} e então sua probabilidade é apenas 1 menos a probabilidade de uma bola branca na 2ª. retirada, ou seja: 1 – 186/342 = 45.61%.

Problema 18

Uma jarra contém 10 biscoitos, 4 deles salgados e 6 doces. 3 biscoitos são selecionados. Seja X o número de biscoitos doces na amostra. Escreva a distribuição de probabilidade de X quando:

a) A amostragem é feita com reposição.

b) A amostragem é feita sem reposição.

Solução

Aqui, N = 10 (tamanho da população = quantidade de biscoitos na jarra), n = 3 (tamanho da amostra), X = número de biscoitos doces na amostra, p = 6/10 (proporção de biscoitos doces na jarra).

a) Se a amostragem é com reposição (a gente simplesmente verifica qual o sabor de cada biscoito encontrado e o colocamos de novo na jarra) então:

$$\Pr(X = x) = \binom{3}{x}(0.6)^x (0.4)^{3-x} \quad \text{onde } x = 0,1,2,3$$

b) Se a amostragem é sem reposição temos:

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{10}{3}} \quad \text{onde } x = 0,1,2,3$$

Problema 19

Sejam $x = \binom{99}{5}$ e $y = \binom{99}{4}$. Expresse $\binom{100}{95}$ em termos de x e y.

Solução

Veja as identidades úteis na página 58 do livro, que são:

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ e $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

Então:

$$\binom{100}{95} = \binom{100}{5} = \binom{99}{4} + \binom{99}{5} = x + y$$

Problema 20

3 jornais, J, G e D são publicados numa cidade. Uma pesquisa feita com leitores adultos revelou que:

32% dos adultos lêem G;
36% dos adultos lêem D;
24% dos adultos lêem J;
12% lêem G e J;
10% lêem G e D;
4% lêem J e D;
2% lêem os 3 jornais.

Para um leitor adulto escolhido aleatoriamente, calcule as seguintes probabilidades:

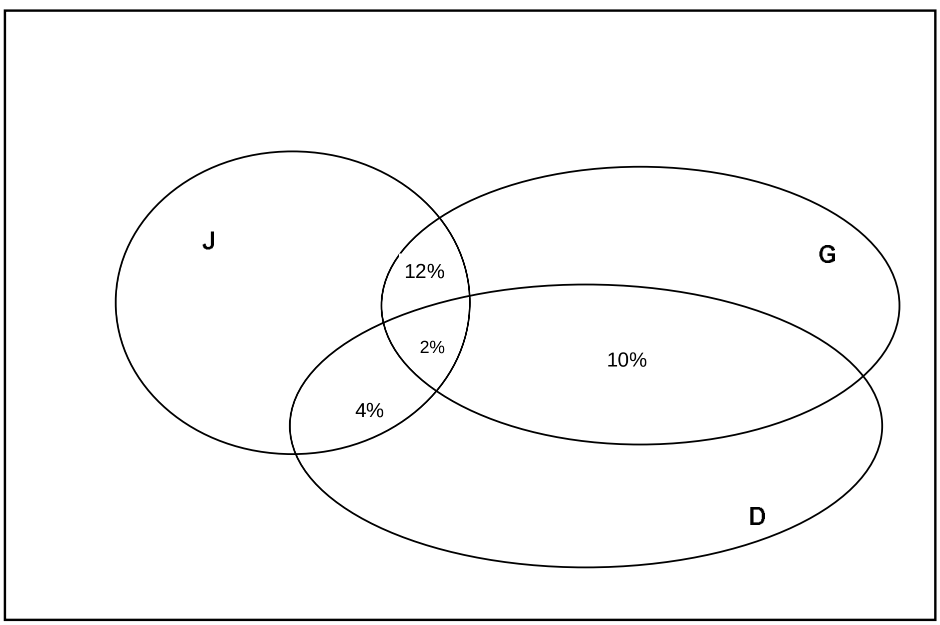
a) De que ele não leia qualquer jornal;

b) De que ele leia exatamente 1 jornal;

c) De que ele leia pelo menos G e D dado que ele lê um dos jornais publicados.

Solução

Considere o seguinte diagrama:



Sabemos que:

Pr(G) = 32%

Pr(D) = 36%

Pr(J) = 24% e também conhecemos as probabilidades das interseções (vide diagrama).

a) O evento {não ler qualquer jornal} é a interseção dos eventos: {não ler G} e {não ler D} e {não ler J}, e a probabilidade desejada é:

$$\Pr\left(\overline{J} \cap \overline{G} \cap \overline{D}\right) = \Pr\left(\overline{J \cup G \cup D}\right) = 1 - \Pr\left(J \cup G \cup D\right) =$$
$$= 1 - \left\{0.32 + 0.36 + 0.24 - \left(0.12 + 0.04 + 0.10\right) + 0.02\right\} = 1 - \left\{0.92 - 0.26 + 0.02\right\} = 1 - 0.68 = 32\%$$

c) O evento {ler exatamente 1 jornal} é a união dos eventos:
{ler J, não ler G, não ler D}
{ler G, não ler J, não ler D}
{ler D, não ler J, não ler D}
e a probabilidade desejada é:

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left\{\left(J \cap \overline{G} \cap \overline{D}\right) \cup \left(\overline{J} \cap G \cap \overline{D}\right) \cup \left(\overline{J} \cap \overline{G} \cap D\right)\right\} = \\
&= \Pr\left(J \cap \overline{G} \cap \overline{D}\right) + \Pr\left(\overline{J} \cap G \cap \overline{D}\right) + \Pr\left(\overline{J} \cap \overline{G} \cap D\right) = \\
&= \Pr(J) - \Pr(G \cap J) - \Pr(D \cap J) + \Pr(J \cap G \cap D) + \\
&+ \Pr(G) - \Pr(G \cap J) - \Pr(G \cap D) + \Pr(J \cap G \cap D) + \\
&+ \Pr(D) - \Pr(D \cap J) - \Pr(J \cap G) + \Pr(J \cap G \cap D) = 0.56
\end{aligned}
$$

d) A probabilidade do evento {ler pelo menos G e D dado que ele lê um dos jornais publicados} é:

$$
\Pr\left(G \cap D \middle| G \cup D \cup J\right) = \frac{\Pr\left((G \cap D) \cap (G \cup D \cup J)\right)}{\Pr(G \cup D \cup J)} = \frac{\Pr(G \cap D)}{\Pr(G \cup D \cup J)} = \frac{0.10}{0.68} = 14.71\%
$$

Problema 21

Um quarto tem 2 mesas de cabeceira iguais, cada uma com 2 gavetas. A mesa 1 contém talões de cheque na 1a. gaveta e dinheiro em espécie na 2a. gaveta. A mesa 2 contém dinheiro em espécie nas duas gavetas. Um ladrão entra na casa e escolhe aleatoriamente uma mesa e, em seguida, uma gaveta e retira dela dinheiro em espécie. Qual a probabilidade deste dinheiro ter sido retirado da mesa 2?

Solução

M_1 e M_2 são os eventos: {selecionar 1^a. mesa} e {selecionar 2^a. mesa} respectivamente. D é o evento {dinheiro em espécie}.

$\Pr(M_1) = \Pr(M_2) = ½$.

$\Pr(D \mid M_1) = ½$ e $\Pr(D \mid M_2) = 1$.

Desejamos encontrar $\Pr(M_2 \mid D)$.

$$
\Pr\left(M_2 \middle| D\right) = \frac{\Pr\left(D \middle| M_2\right).\Pr(M_2)}{\Pr(D)} = \frac{\Pr\left(D \middle| M_2\right).\Pr(M_2)}{\Pr\left(D \middle| M_1\right).\Pr(M_1) + \Pr\left(D \middle| M_2\right).\Pr(M_2)} = \frac{(1)(1/2)}{(1/2)(1/2) + (1)(1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}
$$

Problema 22

Você tem 3 cartões magnéticos de bancos diferentes, A, B e C. Nesta última semana você usou os 3 cartões para retirar dinheiro em caixas eletrônicos, e descobriu que uma das notas sacada durante este período era falsa. A polícia afirma que a probabilidade de encontrar uma nota falsa é 1%. O banco A diz que a probabilidade de uma nota falsa *dado que* o dinheiro foi retirado de um dos seus caixas eletrônicos é 0.2%. Os bancos B e C afirmam que estas probabilidades para os seus caixas eletrônicos são, respectivamente, 0.1% e 0.05%. Você recebeu uma nota falsa. Qual a probabilidade dela ter vindo do caixa eletrônico do banco A? E do banco B? E do banco C?

Solução

Seja F o evento {encontrar nota falsa}. Então: Pr(F) = 1%. Também: Pr(F | A) = 0.2%, Pr(F | B) = 0.1% e Pr(F | C) = 0.05%. Deseja-se saber: Pr(A| F), Pr(B | F) e Pr(C | F).

$$
\Pr\left(A \middle| F\right) = \frac{\Pr(A \cap F)}{\Pr(F)} = \frac{\Pr(F \mid A).\Pr(A)}{\Pr(F)}
$$

Note que o problema não está corretamente especificado, pois falta dizer que são Pr(A), Pr(B) e Pr(C). Também, a solução mais simples (especificar estar probabilidades iguais a 1/30 não funciona, pois nos leva a probabilidades condicionais (dado que a nota é falsa) cuja soma é diferente de 1 (verifique!). Então, vamos deixar a solução indicada em termos de Pr(A), Pr(B) e Pr(C) = 1 – Pr(A) – Pr(B).

$$\Pr(A|F) = \frac{\Pr(F \mid A).\Pr(A)}{\Pr(F)} = \frac{(0.2\%)(p_A)}{(1\%)} = \frac{2p_A}{10}$$

Analogamente:

$$\Pr(B|F) = \frac{\Pr(F \mid B).\Pr(B)}{\Pr(F)} = \frac{(0.1\%)(p_B)}{(1\%)} = \frac{p_B}{10}$$

e

$$\Pr(C|F) = \frac{\Pr(F \mid C).\Pr(C)}{\Pr(F)} = \frac{(0.05\%)p_C}{(1\%)} = \frac{p_C}{20} = \frac{1 - p_A - p_B}{20}$$

Como a soma destas probabilidades condicionais deve ser 1 também:

$$\frac{2p_A}{10} + \frac{p_B}{10} + \frac{1 - p_A - p_B}{20} = 1$$

Isto é:

$$\frac{4p_A + 2p_B + 1 - p_A - p_B}{20} = 1 \Leftrightarrow \frac{3p_A + p_B + 1}{20} = 1 \Leftrightarrow 3p_A + p_B = 19$$

Mas, note que ambos p_A e p_B são probabilidades, e portanto estão no intervalo [0,1]. Levando em conta estas restrições, não existem probabilidades p_A e p_B que satisfaçam a equação $3p_A + p_B = 19$.