Soluções - Capítulo 3

Problema 1

Uma variável aleatória discreta tem função de distribuição dada por:

$F(x) = 1 – (0.5)^{x+1}$ onde x = 0, 1,2, 3, ...

a) Faça um gráfico da função de distribuição, notando que ela é descontínua.

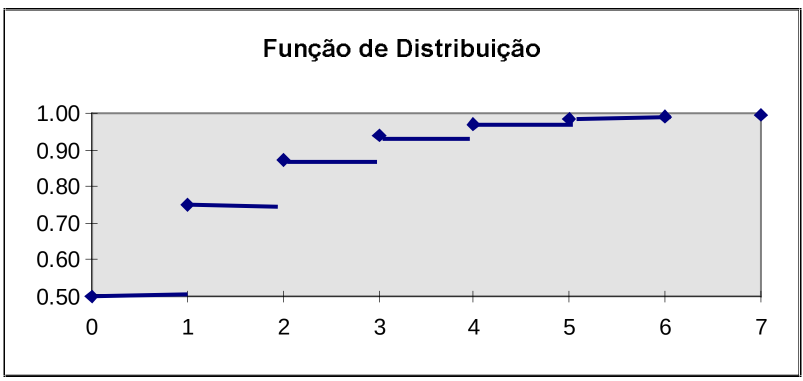
b) Encontre a função de probabilidade de X.

c) Calcule $\Pr(0 \le X \le 5)$

Solução

a) A tabela a seguir apresenta a função de distribuição para alguns valores de x. Note que, para x diferente de 0, 1,2,..., a função de distribuição não é incrementada, por exemplo, F(0) = F(0.3) = F(0.95) = 0.500.

x	F(x)
0	0.500
1	0.750
2	0.875
3	0.938
4	0.969
5	0.984
6	0.992
7	0.996
8	0.998
9	0.999



b) A função de probabilidade é, por definição: f(x) = Pr(X = x)

Neste caso note que f(x) = 0 para todos os valores de x que não são inteiros ≥ 0. Também, do ítem anterior sabemos que $F(x) = \Pr(X \le x) = 1 – (0.5)^{x+1}$ para x = 0, 1, 2, ... e assim $F(x+1) - F(x) = \Pr(X \le x+1) - \Pr(X \le x) = \Pr(X = x+1)$ para x = 0, 1, 2, ... Logo:

$\Pr(X = x+1) = 1 - (0.5)^{x+2} - \{1- (0.5)^{x+1}\} = (0.5)^{x+1} - (0.5)^{x+2} = (0.5)^{x+1}\{ 1 - 0.5\} =$

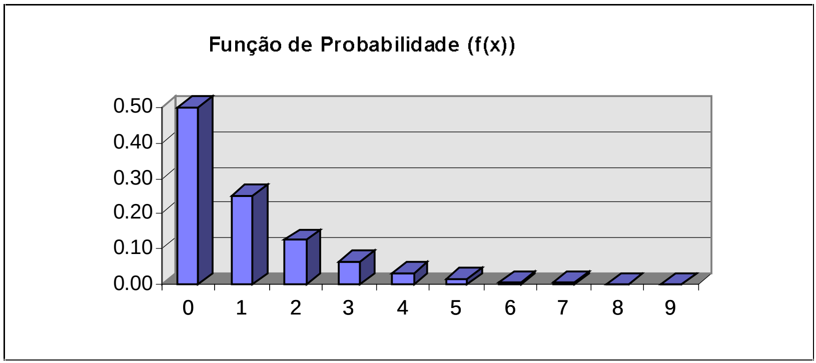
$= (0.5)^{x+2}$ para x = 0, 1, 2, ...

Também, Pr(X = 0) = F(0) = 0.5

Em resumo, a função de probabilidade é $f(x) = \Pr(X = x) = (0.5)^{x+1}$ para x = 0, 1, 2, ...

Verifique que a soma de f(x) para todos os valores possíveis de x é 1!

Um gráfico da função de probabilidade é mostrado a seguir:



c) A partir da função de Probabilidade podemos calcular Pr(0 ≤ X ≤ 5) =

$$= \Pr(X=0)+\Pr(X=1)+\Pr(X=2)+\Pr(X=3)+\Pr(X=4)+\Pr(X=5)=$$

$$=(0.5)+(0.5)^2+\ldots+(0.5)^6=(0.5)\{1+\ldots+(0.5)^5\}=(0.5)\left\{\frac{1-(0.5)^6}{1-0.5}\right\}=1-(0.5)^6=$$

$$=0.9844$$

Note que, a partir da função de distribuição encontramos o mesmo resultado, pois neste caso temos: Pr(0 ≤ X ≤ 5) = F(5) = 1 – $(0.5)^6$ = 0.9844. A variável aleatória X é ***discreta*** e então Pr(0 ≤ X ≤ 5) ***não é igual*** a F(5) – F(0).

Problema 2

Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade:

$f(x) = k.(0.5)^x$ onde x = 1,2,3

a) Encontre a constante k.

b) Ache a média e variância de X.

c) Calcule a função de distribuição de X.

Solução

a) Pela definição temos:

$$\sum_{x=1}^{3} k(0.5)^x = k\{0.5+(0.5)^2+(0.5)^3\}=1 \Rightarrow k\{0.875\}=1$$

$$\Rightarrow k = 1.1429$$

b) A média de X é:

E(X) = $$\sum_{x=1}^{3} k.x.(0.5)^x = k\{0.5+2(0.5)^2+3(0.5)^3\}=\frac{1}{0.875}\{1.375\}=1.5714$$

O segundo momento de X é:

$E(X^2)$ = $$\sum_{x=1}^{3} k.x^2.(0.5)^x = k\{0.5+4(0.5)^2+9(0.5)^3\}=\frac{1}{0.875}\{2.625\}=3$$

Logo, a variância de X é:

$$VAR(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=3-(1.5714)^2=0.5306$$

O desvio padrão de X é apenas a raiz quadrada positiva da variância.

c) A função de distribuição (F(x)) de X é facilmente encontrada a partir da função de probabilidade (f(x)).

$F(x) = Pr(X \leq x) = 0$ se $x < 1$

$F(1) = Pr(X \leq 1) = (0.5).k$

$F(2) = Pr(X \leq 2) = k\{ 0.5 + 0.25\} = 0.75.k$

$F(3) = Pr(X \leq 3) = k\{ 0.5 + 0.25 + 0.125\} = 0.875.k = 1$

$F(x) = 1$ se $x > 3$

Problema 3

Seja X uma variável aleatória contínua com densidade f(x) = 2x/9 onde

0 < x < 3.

a) Encontre a função de distribuição de X.

b) Ache a média e a variância de X.

c) Encontre um ponto m no intervalo (0,3) tal que $Pr(X \leq m) = Pr(X \geq m) = 50\%$.

Este ponto é a **mediana** da distribuição de X.

Solução

a) A função de distribuição é F(x) = 0 se x < 0, F(x) = 1 se x > 3 e

$$F(x) = \int_0^x \frac{2u}{9} du = \frac{2}{9}\left\{\frac{u^2}{2}\right\}\Bigg|_0^x = \left\{\frac{u^2}{9}\right\}\Bigg|_0^x = \frac{x^2}{9} \quad \text{se } 0 \leq x \leq 3$$

b) A média de X é, por definição:

$$E(X) = \int_0^3 x\left(\frac{2x}{9}\right)dx = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = 2$$

O segundo momento de X é:

$$E(X^2) = \int_0^3 x^2\left(\frac{2x}{9}\right)dx = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{2(9)(9)}{4(9)} = \frac{9}{2} = 4.5$$

Portanto, a variância de X é:

$$VAR(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 4.5 - (2)^2 = 0.5$$

c) A mediana de X pode ser otida da função de distribuição. Procuramos o valor <u>m</u> no intervalo [0,3] tal que F(m) = 0.5. Do ítem a) desta questão sabemos que a função de distribuição é: $F(x) = x^2/9$ e então segue que $F(m) = m^2/9 = 0.5$ e daí $m^2 = 4.5$ e $m = \sqrt{4.5} = 2.1213$.

Nota: ambas a média e a mediana são medidas da centralidade da distribuição de X, isto é, indicam onde fica o "meio" da distribuição de X. Note que, neste exemplo, a média é 2 e a mediana é 2.1213, isto é, valores diferentes. Se a densidade de X é simétrica (mesmo "peso") acima e abaixo da média, a média e a mediana coincidem, o que não é o caso neste exemplo.

Problema 4

Um exame vestibular consiste em 100 questões de múltipla escolha, cada uma com 5 respostas possíveis. Em cada questão, apenas uma resposta é correta.

a) Qual a probabilidade de que uma pessoa que "chute" todas as questões acerte 35 ou mais questões?
b) Qual a probabilidade desta pessoa acertar entre 17 e 25 (incluindo 17 e 25) questões?
c) Qual o número esperado de questões certas para uma pessoa que "chute" todas as questões?

Solução

Este é tipicamente um problema da distribuição Binomial. Note que existe uma experiência (chutar uma questão), que tem probabilidade de sucesso (fixa) p = 1/5 e que é repetida um número fixo e conhecido de vezes (n = 100 vezes).

Seja X o número de respostas "chutadas" corretamente. Então X tem distribuição Binomial com parâmetros n = 100 e p = 1/5.

As probabilidades Binomiais estão implementadas diretamente como funções no Excel e serão empregadas a seguir na solução do exercício.

a) A probabilidade desejada é $Pr(X \geq 35) = Pr(X = 35) + Pr(X = 36) + ... +$
$+ Pr(X = 100) = 1 - Pr(X < 35) = 1 - Pr(X \leq 34) = 1 - F(34) = 1 - 99.97\% =$ **0.03%.**

b) $Pr(17 \leq X \leq 25) = F(25) - F(16) = 91.25\% - 19.23\% =$ **72.02%**.

c) O número esperado de questões certas é a média de X, dada por E(X) = n.p = (100).(1/5) = 20.

Problema 5

Uma empresa aérea sabe que 20% das pessoas que fazem reservas aéreas cancelam suas reservas. A empresa vende 50 passagens para um vôo que contém apenas 46 lugares. Supondo que as pessoas cancelam ou não suas reservas de maneira independente, calcule a probabilidade de que haverá assentos para todos os passageiros.

Solução

Este é também um problema Binomial, que pode ser pensado de duas maneiras diferentes.

1a. solução possível: X é a variável que indica o número de pessoas que fizeram reserva e as cancelaram. Note que X tem distribuição Binomial com n = 50 e p = 20%.

2a. solução possível: Y indica o número de pessoas que fizeram reserva e não cancelaram a reserva, isto é, pretendem viajar. Y tem distribuição Binomial com n = 50 e p = 80%.

É claro que usando de maneira adequada as variáveis X ou Y encontraremos a resposta correta.

Mas, o que realmente nos interessa saber? A probabilidade de que haverá assentos para todos os passageiros equivale à probabilidade de que X seja maior ou igual à 4, isto é $Pr(X \geq 4) = 1 - Pr(X \leq 3) = 1 - F(3) =$ **99.43%.**

Alternativamente, se usarmos Y ao invés de X, desejamos calcular $Pr(Y \leq 46) = F(46) =$ **99.43%.**

Logo, o procedimento de "overbooking" (como é conhecida a venda de passagens em excesso) neste caso é plenamente justificável, e dificilmente irá ferir os direitos dos passageiros, pois a probabilidade de existirem assentos para todos os passageiros do vôo é muito alta.

A seguir reproduzimos parte de uma planilha Excel para que o leitor possa conhecer as funções estatísticas relevantes neste problema.

x	f(x) = Pr(X=x)	F(x) = Função Distribuição	1-F(x) = Pr(X > x)
0	0.0000	0.00%	100.00%
1	0.0002	0.02%	99.98%
2	0.0011	0.13%	99.87%
3	0.0044	0.57%	**99.43%**
4	0.0128	1.85%	98.15%
5	0.0295	4.80%	95.20%
6	0.0554	10.34%	89.66%
7	0.0870	19.04%	80.96%
8	0.1169	30.73%	69.27%
9	0.1364	44.37%	55.63%
10	0.1398	58.36%	41.64%

y	g(y) = Pr(Y = y)	G(y) = Função Distribuição	1 - G(y) = Pr(Y > y)
40	0.1398	55.63%	44.37%
41	0.1364	69.27%	30.73%
42	0.1169	80.96%	19.04%
43	0.0870	89.66%	10.34%
44	0.0554	95.20%	4.80%
45	0.0295	98.15%	1.85%
46	0.0128	**99.43%**	0.57%
47	0.0044	99.87%	0.13%
48	0.0011	99.98%	0.02%
49	0.0002	100.00%	0.00%
50	0.0000	100.00%	0.00%

Problema 6

Uma variável aleatória discreta X tem densidade dada por:

$$f(x) = k.p^x, \text{ onde x } = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ \text{e } 0 < p < 1$$

a) Encontre o valor da constante k que faz desta expressão uma densidade.

b) Encontre E(X)

Solução

Este problema é bastante parecido com o exercício 2, mas agora todos os somatórios são infinitos.

O seguinte resultado é fundamental aqui:

Série Geométrica Infinita

$$\sum_{x=1}^{\infty} a^x = a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots = \frac{a}{1-a} \quad \text{desde que } |a| < 1$$ e também

$$\sum_{x=0}^{\infty} a^x = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-a} \quad \text{desde que } |a| < 1$$

a) Precisamos encontrar k tal que: $\sum_{x=1}^{\infty} k.p^x = 1 \Rightarrow k\left\{\frac{p}{1-p}\right\} = 1$

e assim $k = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$ e a densidade torna-se: f(x) = q.p^{x-1} onde x = 1, 2, 3, ...; isto é, X tem ***função de probabilidade Geométrica*** com parâmetro p.

b) Por definição: $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x.f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x.q.p^{x-1} = q\sum_{x=1}^{\infty} x.p^{x-1} = q\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\right\} = \frac{q}{q^2} = \frac{1}{q}$

Problema 7

Seja X uma variável aleatória discreta com densidade:

$$f(x) = \frac{k.(3)^x}{x!}$$

onde x = 0, 1, 2, ...

a) Encontre a constante k que faz de f(x) uma densidade (dica: use uma expansão de Taylor "famosa" !!)

b) Calcule a média de X.

Solução

Dica: Série de Taylor para a exponencial

$$e^u = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{u^x}{x!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + ...$$

a) A constante k é responsável por fazer com que a função de probabilidade some a 1, isto é:

$$\sum_{x=0}^{\infty} k \frac{(3)^x}{x!} = k \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(3)^x}{x!} = k.e^3 = 1 \Rightarrow k = e^{-3}$$

b) Pela definição, a média de X é:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x.\left\{ e^{-3} \frac{(3^x)}{x!} \right\} = e^{-3} \sum_{x=1}^{\infty} 3 \left\{ \frac{3^{x-1}}{(x-1)!} \right\} = 3e^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} = 3e^{-3}.e^{+3} = 3$$

Problema 8

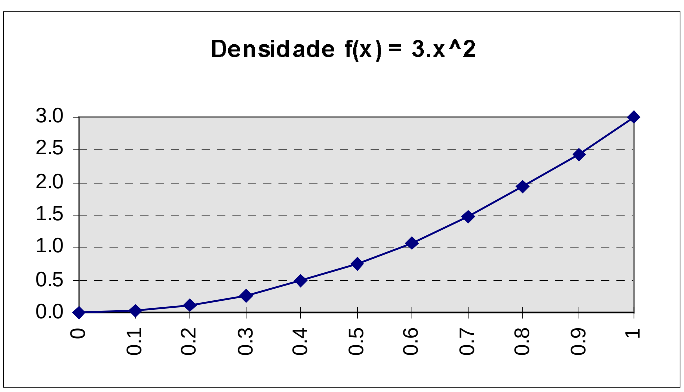
Seja X uma variável aleatória contínua com densidade

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{do c ontrario} \end{cases}$$

Faça o gráfico da densidade e da função de distribuição.

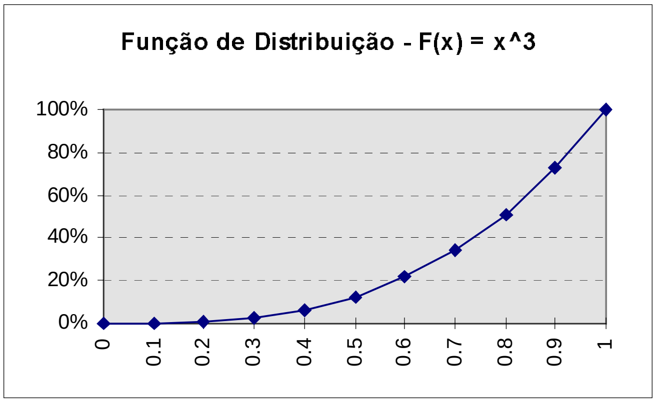
Solução

O gráfico da densidade é:



A função de distribuição é dada por: F(x) = Pr(X ≤ x) = 0 se x < 0, 1 se x > 1 e

$$F(x) = \int_0^x 3.u^2 du = u^3 \Big|_0^x = x^3$$ se 0 < x < 1. O gráfico desta função é mostrado a seguir.



Problema 9

O tempo de duração (em centenas de horas) de um certo componente é uma variável aleatória Y com função de distribuição dada por:

$$F(y)=\begin{cases}1-\exp\left(-y^2\right) & \text{se } y \geq 0\\ 0 & \text{do contrario}\end{cases}$$

a) Mostre que F(y) satisfaz as propriedades de uma função de distribuição.

b) Encontre a densidade de Y.

c) Ache a probabilidade de que o componente dure pelo menos 100 horas? E mais de 200 horas?

Solução

a) Note que o limite de F(y) quando y tende a +∞ é 1 e o limite quando y tende a -∞ é zero, pois é igual a F(0). Também, F(y) é uma função não decrescente.

b) A densidade de Y é encontrada por diferenciação:

$$f(y) = -e^{-y^2}(-2y) = 2.y.e^{-y^2}, \quad y \geq 0$$

c) Pr(Y ≥ 100) = $\int_{100}^{\infty} 2.y.e^{-y^2} dy$

Faça a mudança de variáveis $t = y^2 \Rightarrow dt = 2.y.dy$ e então

Pr(Y ≥ 100) = $\int_{10}^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_{10}^{\infty} = e^{-10}$

Analogamente:

Pr(Y > 200) = $\int_{200}^{\infty} 2.y.e^{-y^2} dy = \int_{\sqrt{200}}^{\infty} e^{-t} dt = e^{-10\sqrt{2}}$

Problema 10

O tempo necessário para que um aluno faça um teste que tem duração máxima de 1 hora é uma variável aleatória com densidade:

$$f(y)=\begin{cases} cy^2+y, & 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{do contrario}\end{cases}$$

a) Encontre a constante c.

b) Ache a função de distribuição F(y).

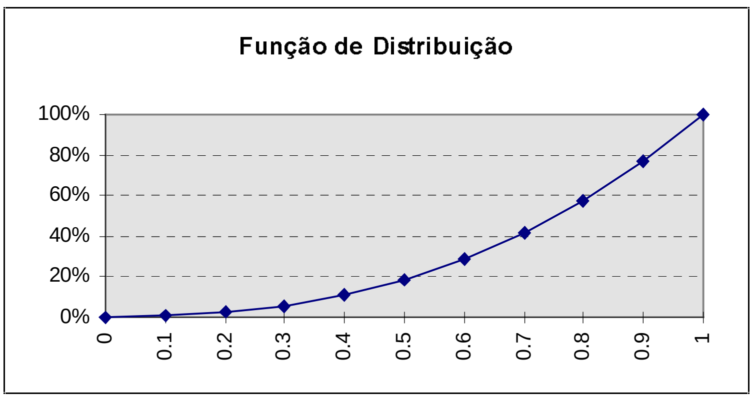
c) Qual a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de meia hora?

Solução

a) $$\int_0^1 \left(cy^2+y\right)dy = \left(\frac{c.y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{c}{3}+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow \frac{c}{3}=\frac{1}{2} \Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

b) A função de distribuição é F(y) = 0 se y < 0, F(y) = 1 se y > 1 e:

$$F(y)=\int_0^y\left(\frac{3t^2}{2}+t\right)dt=\left(\frac{t^3}{2}+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^y=\frac{1}{2}\left(y^3+y^2\right)$$



Problema 11

A variável aleatória X tem densidade:

$$f(x)=k.x^3.\exp\left\{-\frac{x}{2}\right\},\ x\ge 0$$

.

Encontre o valor da constante <u>k</u> necessária para que f(x) seja uma densidade.

Solução

Nota: Função Gama

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty t^{n-1}.\exp(-t)dt=(n-1)!$$ onde n é um inteiro positivo > 1.

Em particular, se n = 4 temos:

$$\Gamma(4)=\int_0^\infty t^{4-1}.\exp(-t)dt=\int_0^\infty t^3.\exp(-t)dt=(3)!=6$$

Usaremos este resultado para avaliar a constante k da densidade acima.

$$\int_0^\infty k.x^3.\exp(-x/2)dx=\int_0^\infty k.(2.t)^3.\exp(-t).(2dt)=16k\int_0^\infty t^3.\exp(-t)dt=16k(6)=96k=1$$

Logo, k = 1/96.

Problema 12

Seja g(x) = c.x.(1 - x^2) para $0 \leq x \leq 1$. Qual o valor de c necessário para fazer de g(.) uma densidade?

Solução

$$\int_0^1 c.x.\left(1-x^2\right)dx = c\int_0^1 \left(x-x^3\right)dx = c\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = c\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = c\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

Assim c = 4 é a constante necessária para que g(x) seja uma densidade.

Problema 13

Existe alguma densidade Exponencial que satisfaz a condição:

$$\Pr(X<2) = \frac{2}{3}\Pr(X<3)$$

Se existir, qual a média desta densidade?

Solução

Considere a densidade Exponencial com parâmetro λ dada por:

$f(x) = \lambda.\exp(-\lambda.x)$ onde $x \geq 0$ e $\lambda > 0$.

Então, a função de distribuição é F(x) = Pr(X ≤ x) = 1 - exp(-λ.x) e daí

Pr(X > x) = 1- F(x) = exp(-λ.x).

Logo, precisamos resolver para λ a seguinte equação:

1 - exp(-2λ) = (2/3).{ 1 - exp(-3λ)}

(1/3) - exp(-2λ) + (2/3).{ exp(-3λ)} = 0

Seja h(λ) = (1/3) - exp(-2λ) + (2/3).{ exp(-3λ)}

Precisamos investigar a existência de ***raízes positivas*** da equação h(λ) = 0.

Note que, para valores grandes de λ, a função h(λ) tende a +1/3 pois todas as exponenciais decrescem a zero.

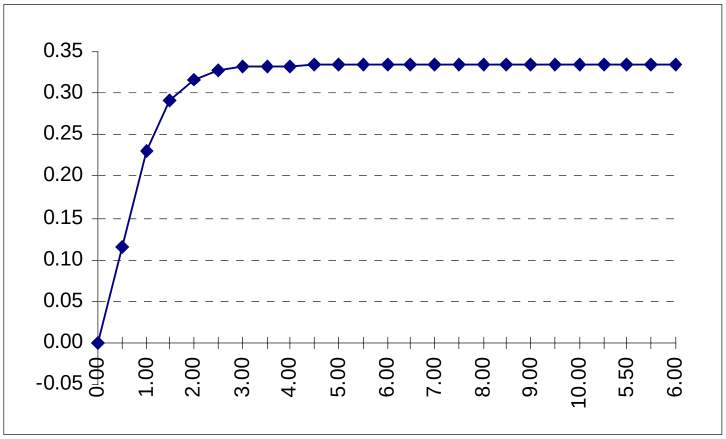
A primeira derivada de h(λ) com relação a λ é:

h'(λ) = -(-2) exp(-2λ) + (2/3).{ (-3).exp(-3λ)} = + 2 exp(-2λ) - 2 exp(-3λ)

h'(λ) = 2.{exp(-2λ)}{1 - exp(-λ)} > 0 para todo λ > 0.

Logo a função h(λ) não apresenta pontos críticos para λ > 0 e portanto máximos e mínimos só podem ocorrer nos extremos do intervalo.

Um gráfico de h(λ) versus λ é mostrado a seguir. Note que a função não decresce a zero e portanto não existe valor positivo de λ para o qual h(λ) seja zero. Logo, **não existe** densidade Exponencial que satisfaça a relação dada.



Problema 14

Um fabricante de monitores garante os equipamentos ele produzidos por um período de 1 ano (8760 horas). Os monitores são usados em terminais de aeroportos, e permanecem continuamente ligados. A duração média de um monitor é 20000 horas e segue uma distribuição Exponencial.

O custo de fabricação, venda e entrega de um monitor é R$ 300, e a fábrica vende os monitores a R$ 400 por unidade.

O custo de reposição de um monitor defeituoso é R$ 150.

O fabricante não tem qualquer obrigação de reposição do monitor após a 1a. reposição. Qual o lucro esperado do fabricante?

Solução

O lucro do fabricante (por unidade produzida) é uma variável aleatória L cujos valores são:

$$L = \begin{cases} 100 & \text{se duracao } > 1 \text{ ano} \\ -50 & \text{se duracao } < 1 \text{ ano} \end{cases}$$

Logo, o lucro esperado é:

E(L) = 100.Pr(L = 100) + (-50).Pr(L = -50)

Mas:

Pr(L = 100) = Pr(X > 8760 horas) onde X indica a duração de um monitor, que é uma variável Exponencial com média 20000 h.

Logo:

$$\text{Pr(X } > \text{ 8760 horas)} \; =$$

$$= \int_{8760}^{\infty} \frac{1}{20000} \exp\left\{-\frac{x}{20000}\right\} dx = \exp\left\{\frac{-8760}{20000}\right\} = \exp\{-0.438\} = 0.6453$$

Pr(X ≤ 8760 horas) = 1 - 0.6453 = 0.3547

Finalmente o lucro esperado por monitor vendido é:

E(L) = 100(0.6453) + (-50)(0.3547) = 46.80 reais (aproximadamente)

Problema 15

Seja X uma variável aleatória contínua com densidade Uniforme no intervalo

(- θ, θ).

Em cada caso abaixo calcule θ de forma a satisfazer a condição dada.

a) Pr(X > 1/2) = 1/4

b) Pr(X < 1/4) = 3/4

c) Pr(X > 1/2) = 2. Pr(X < -1)

d) Pr(X < 1/2) = 2. Pr(X > 1/4)

Solução

A densidade Uniforme (-θ, θ) tem a forma:

$f(x) = \frac{1}{2\theta}$ se $-\theta < x < \theta$ e f(x) = 0 se x está fora do intervalo (-θ, θ).

Em qualquer caso:

Pr(X > x) = $\int_x^\theta \frac{1}{2\theta} dt = \frac{1}{2\theta}(\theta - x)$ se $-\theta < x < \theta$ e então:

Pr(X ≤ x) = F(x) = $1 - \frac{1}{2\theta}(\theta - x) = \frac{(\theta + x)}{2\theta}$ se $-\theta < x < \theta$

Podemos então tentar calcular θ em cada caso:

a) Pr(X > 1/2) = ¼

$$\frac{1}{2\theta}\left(\theta - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\theta} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4\theta} \Rightarrow \theta = 1$$

b) Pr(X < 1/4) = ¾

$$\frac{(\theta + 1/4)}{2\theta} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\theta + 1 = 6\theta \Leftrightarrow 2\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 1/2$$

c) Pr(X > 1/2) = 2. Pr(X < -1)

$$\frac{1}{2\theta}\left(\theta - \frac{1}{2}\right) = 2\left\{\frac{\theta - 1}{2\theta}\right\} \Leftrightarrow \left(\theta - \frac{1}{2}\right) = 2(\theta - 1) \Leftrightarrow \theta - 2\theta = -2 + (1/2)$$
$$\Leftrightarrow -\theta = -3/2 \Leftrightarrow \theta = 3/2$$

d) Pr(X < 1/2) = 2. Pr(X > 1/4)

$$\frac{\theta + (1/2)}{2\theta} = \frac{2(\theta - 1/4)}{2\theta} \Leftrightarrow \theta + (1/2) = 2\theta - 1/2 \Leftrightarrow 1 = \theta$$

Problema 16

Seja X uma variável aleatória contínua com densidade f(x) = exp(-x), x >0.

Avalie Pr{| X - μ | ≥ k.σ } para k = 1, 2, 3 e compare com os limites fornecidos pela desigualdade de Chebyshev.

Solução

Os limites dados por Chebyshev (válidos para qualquer distribuição com média μ e variância σ^2) são iguais a $1/k^2$, isto é:

Se k = 1, Pr{| X - μ | ≥ σ } < 1

Se k = 2, Pr{| X - μ | ≥ 2σ } < ¼ = 25%

Se k = 3, Pr{| X - μ | ≥ 3σ } < 1/9 = 11.11%

Neste caso particular, a densidade de X é a densidade Exponencial com média 1 e portanto μ = E(X) = 1 e VAR(X) = σ^2 = 1 e então σ, o desvio padrão de X, é também 1.

Logo, devemos avaliar:

Pr{| X - 1 | ≥ k } = 1 - Pr{| X - 1 | < k } = 1 - Pr{ - k + 1 < X < k +1} para k = 1, 2, 3.

Se k = 1, Pr{| X - μ | ≥ σ } = 1 - Pr{ 0 < X < 2} = $= 1 - \int_0^2 e^{-x} dx = 1 - \left\{1 - e^{-2}\right\} = e^{-2} = 13.53\%$

Se k = 2, Pr{| X - μ | $\geq 2\sigma$ } = 1 - Pr{ -1 < X < 3} = 1 - Pr{ 0 < X < 3} = e^{-3} = 4.98%

Se k = 3, Pr{| X - μ | $\geq 3\sigma$ } = 1 - Pr{ -2 < X < 4} = 1 - Pr{ 0 < X < 4} = e^{-4} = 1.83%

Isto é, os valores reais das probabilidades são bem menores que os valores limite dados por Chebyshev.

Problema 17

Seja X uma variável discreta com valores possíveis 1, 2, 3, ... e função de probabilidade f(x) = $(1/2)^X$. Calcule:

a) Pr(X ser par)

b) Pr(X > 4)

c) Pr(X ser divisível por 3)

d) Pr(X ser divisível por 5)

Solução

a) Note que os valores possíveis de X começam em 1 (e não em zero) e daí segue que:

Pr(X ser par) = Pr(X = 2, 4, 6, 8, ...) = Pr(X = 2) + Pr(X = 4) + Pr(X = 6) + ...

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(X = 2k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

b) Pr(X > 4) = 1- Pr(X $\leq$ 4) = 1 - Pr(X = 1) - Pr(X = 2) - Pr(X = 3) - Pr(X = 4) =

= 1 - ½ - ¼ -1/8 - 1/16 = 1/16 = 6.25%

c) Pr(X ser divisível por 3) = Pr(X = 3k) para k = 1,2, 3, ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(X = 3k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^{k} = \frac{1/8}{1-1/8} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$$

d) Pr(X ser divisível por 5) = Pr(X = 5k) para k = 1,2, 3, ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(X = 5k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{5k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{32}\right)^{k} = \frac{1/32}{1-1/32} = \frac{1/32}{31/32} = \frac{1}{31}$$

Problema 18

Seja X uma variável contínua definida no intervalo [0,2] e com densidade dada por f(x) = x/2. Suponha que X, Y e Z são variáveis independentes, todas com esta densidade. Calcule:

a) Pr(X > 1)

b) Pr(X > 1, Y > 1)

c) Pr(X > 1, Y > 1, Z < 1)

Solução

a) $$\Pr(X > 1) = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_1^2 = \frac{1}{4}(4-1) = \frac{3}{4} = 75\%$$

b) Pela independência de X e Y: Pr(X > 1, Y > 1) = Pr(X > 1).Pr(Y > 1) = $(3/4)^2$ =

=9/16 = 56.25%

c) Analogamente ao ítem anterior, a resposta agora é $(3/4)^3$ = 27/64 = 42.19%

Problema 19

Um componente eletrônico tem uma duração aleatória X, modelada pela densidade f(x) = b.exp{ -b.x} onde x > 0. Seja p(j) = Pr($j \le X < j+1$) . Verifique que p(j) tem a forma $(1-a)a^j$ e determine a.

Solução
Suponha que X é uma variável contínua. Assim p(j) = F(j+1) - F(j) onde F(.) é a função de distribuição associada à densidade f(.), isto é:

$$F(x) = \int_0^x b.\exp(-bu)du = 1 - e^{-bx}$$

Logo: $p(j) = F(j+1) - F(j) = 1 - e^{-b(j+1)} - 1 + e^{-bj} = e^{-bj}\{1 - e^{-b}\} = a^j\{1-a\}$ onde $a = e^{-b}$.

Problema 20

A proporção de impurezas num certo composto é uma variável aleatória X com densidade f(x) = 6x(1-x), onde $x \in [0,1]$.

a) Verifique que f(x) é uma densidade.

b) Encontre a função de distribuição acumulada.

c) Faça um gráfico da função de distribuição.

d) Encontre uma constante c tal que Pr(X < c) = 2.Pr(X > c).

e) Encontre uma constante c tal que Pr(X > c) = 4.Pr(X < c).

Solução

a)

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 6x(1-x)dx = \int_0^1 (6x - 6x^2)dx = 6\int_0^1 (x - x^2)dx = 6\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right\}\Bigg|_0^1 =$$

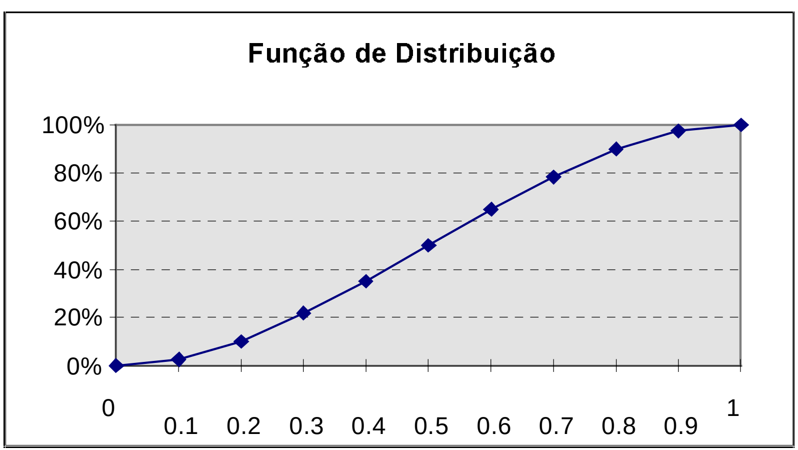
$$= 6\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right\} = 6\left\{\frac{3-2}{6}\right\} = 1$$

b) A função de distribuição acumulada é:

$$F(x) = \int_0^x 6u(1-u)du = 6\left\{\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right\}\Bigg|_0^x = 3x^2 - 2x^3 \quad \text{para } 0 < x < 1$$

e F(x) = 0 se $x \le 0$, F(x) = 1 se $x \ge 1$.

c) O gráfico da função de distribuição acumulada é mostrado a seguir:



d) Encontre uma constante c tal que Pr(X < c) = 2.Pr(X > c).

Suponha que c seja um valor no intervalo [0,1] para que a densidade seja não nula em c. Note que $Pr(X < c) = F(c) = 3.c^2 - 2.c^3$ e também

$Pr(X > c) = 1 - Pr(X < c) = 1 - F(c) = 1 - 3.c^2 + 2.c^3$. Logo, precisamos resolver:

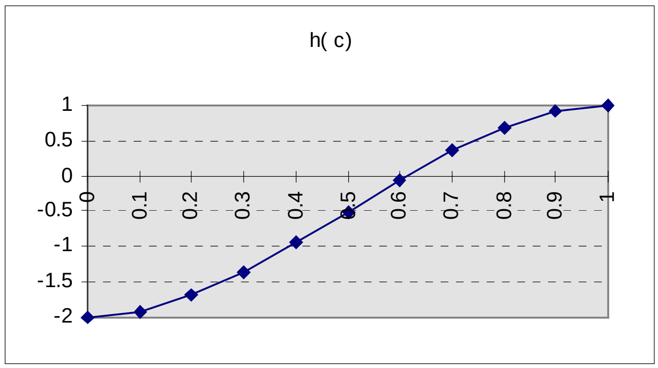
$3.c^2 - 2.c^3 = 2\{ 1 - 3.c^2 + 2.c^3\} \Leftrightarrow 3.c^2 - 2.c^3 = 2 - 6.c^2 + 4.c^3$

$\Leftrightarrow 3.c^2 + 6.c^2 - 2.c^3 - 4. c^3 = 2 \Leftrightarrow 9c^2 - 6c^3 = 2$

$\Leftrightarrow 3c^2\{ 3 - 2c\} -2 = 0$

Considere a função $h(c) = 3c^2\{ 3 - 2c\} -2$ cujo gráfico está a seguir:

c	h(c)
0	-2
0.1	-1.916
0.2	-1.688
0.3	-1.352
0.4	-0.944
0.5	-0.5
0.6	-0.056
0.7	0.352
0.8	0.688
0.9	0.916
1	1



Do gráfico e da tabela notamos que existe uma raiz de h(c) = 0 entre 0.6 e 0.7. Pelo SOLVER do Excel a solução é **c = 0.613037.**

e) Encontre uma constante c tal que $Pr(X > c) = 4.Pr(X < c)$.

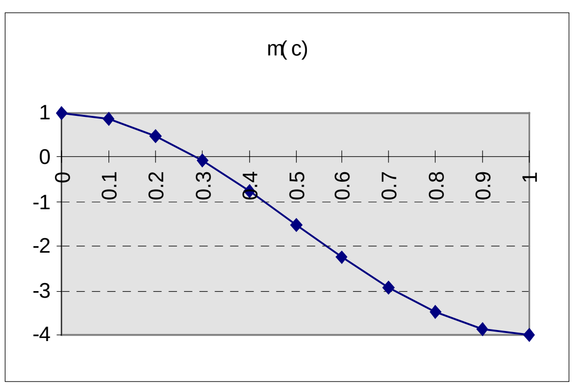
$Pr(X > c) = 1 - Pr(X < c) = 1 - F(c) = 1 - 3.c^2 + 2.c^3$. Logo, precisamos resolver:

$1 - 3.c^2 + 2.c^3 = 4\{3.c^2 - 2.c^3\} \Leftrightarrow 1 - 3.c^2 + 2.c^3 - 12.c^2 + 8.c^3 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 15.c^2 + 10.c^3 = 0$

Seja $m(c) = 1 - 15.c^2 + 10.c^3$. A seguir apresentamos o gráfico de m(c) versus c e encontramos a raiz da equação m(c) = 0. A raiz da equação é **c = 0.287141.**

c	m(c)
0	1
0.1	0.86
0.2	0.48
0.3	-0.08
0.4	-0.76
0.5	-1.5
0.6	-2.24
0.7	-2.92
0.8	-3.48
0.9	-3.86
1	-4



Problema 21

Seja X uma variável com distribuição Uniforme no intervalo (-c, c), onde c > 0. Encontre (se possível) a constante c tal que as seguintes relações são satisfeitas:

a) Pr(X > 1) = 1/3

b) Pr(X < 1/2) = 0.4

c) Pr(X > 1) = 1/2

d) Pr(X < 1/2) = 0.8

Solução

Veja a solução do problema 15.

Em qualquer caso:

Pr(X > x) = $\int_x^c \frac{1}{2c}dt = \frac{1}{2c}(c-x)$ se $-c < x < c$ e então:

Pr(X ≤ x) = F(x) = $1 - \frac{1}{2c}(c-x) = \frac{(c+\mathrm{x})}{2\mathrm{c}}$ se $-c < x < c$

a) $\frac{c-1}{2c} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3c - 3 = 2c \Rightarrow c = 3$

b) $\frac{c+0.5}{2c} = 0.4 \Rightarrow c + 0.5 = 0.8c \Rightarrow 0.2c = -0.5 \Rightarrow c = -2.5$ o que é impossível, pois c é, por hipótese, positivo.

c) $\frac{c-1}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c - 2 = 2c$ e não há solução possível.

d) $\frac{c+0.5}{2c} = 0.8 \Rightarrow c + 0.5 = 1.6c \Rightarrow -0.6c = -0.5 \Rightarrow c = 5/6$

Problema 22

Seja Y uma variável aleatória discreta definida em 1, 2, 3, ... e suponha que sua função de probabilidade é: f(y) = Pr(Y = y) = k(1-c)$^{y-1}$ onde c é um número no intervalo (0,1) e k é uma constante que faz desta expressão uma função de probabilidade.

a) Ache a constante k.

b) Encontre a moda desta distribuição.

Solução

a) Note que (1-c) é também um número no intervalo (0,1).

$$\sum_{y=1}^{\infty} k(1-c)^{y-1} = k\sum_{y=1}^{\infty}(1-c)^{y-1} = \frac{k}{1-c}\sum_{y=1}^{\infty}(1-c)^{y} = \frac{k}{1-c}\left\{\frac{1-c}{1-(1-c)}\right\} = k\left\{\frac{1}{c}\right\} = 1$$

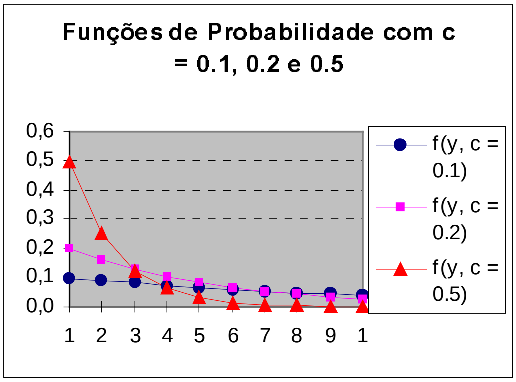
$$\Rightarrow k = c$$

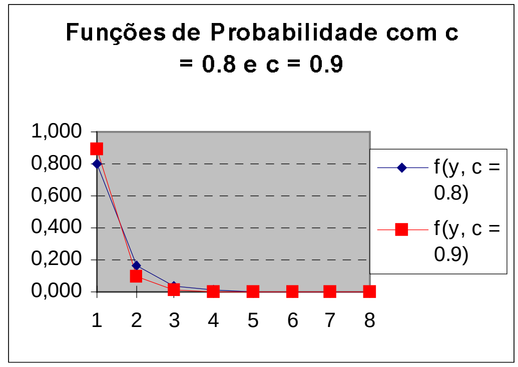
Logo, a função de probabilidade é:

Pr(Y = y) = c(1-c)$^{y-1}$ para y = 1, 2, 3, ... e c um número entre 0 e 1.

b) A moda da distribuição é o ponto no qual a função de probabilidade atinge um máximo.

Neste caso (vide gráficos) a função de probabilidade é sempre decrescente e assim a moda corresponde ao valor y =1.


Funções de Probabilidade com c = 0.1, 0.2 e 0.5
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 1
f(y, c = 0.1)
f(y, c = 0.2)
f(y, c = 0.5)


Funções de Probabilidade com c = 0.8 e c = 0.9
1,000
0,800
0,600
0,400
0,200
0,000
1 2 3 4 5 6 7 8
f(y, c = 0.8)
f(y, c = 0.9)