IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2004.02
Lista de Exercícios # 2

Problema 1
Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma densidade $f(x,\theta)$. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ em cada um dos casos a seguir:
$f(x,\theta) = \theta.e^{-\theta x}$, $x \geq 0$, $\theta > 0$.
$f(x,\theta) = \theta.c^{\theta}.x^{-(\theta+1)}$, $x \geq c > 0$, $\theta > 0$ (densidade Pareto)
$f(x,\theta) = c.\theta^{c}.\ x^{-(c+1)}$, $x \geq \theta > 0$, $c > 0$ (densidade Pareto)
$f(x,\theta) = \frac{x}{\theta^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\right\}$, $x > 0$, $\theta > 0$ (densidade Rayleigh)
$f(x,\theta) = \theta.c.x^{c-1}.\exp\{-\theta.x^{c}\}$, $x \geq 0$, $\theta > 0$ (densidade Weibull)

Problema 2
Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid Poisson(λ). Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $\Pr\{X_i = 0) = e^{-\lambda}$. Verifique que este estimador de máxima verossimilhança é tendencioso . Encontre um estimador não tendencioso de $e^{-\lambda}$.
Dica: Considere a função geradora de momentos dos X's.

Problema 3
Gere 200 amostras de tamanho 50 da distribuição Poisson(2) (você pode fazer isso usando o Excel).
Em cada uma das 200 amostras encontre a estimativa de $\Pr\{X_i = 0\}$ por máxima verossimilhança. Faça um histograma destes valores dos estimadores de máxima verossimilhança. Qual a "cara" do gráfico?

Problema 4
Sejam $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ as estatísticas de ordem da densidade:
$f(x,\theta) = 1$ se $\theta - 0.5 \leq x \leq \theta + 0.5$ onde θ é um número real qualquer.
Mostre que toda estatística $u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tal que :
$X_{(n)} - 0.5 \leq u(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq X_{(1)} + 0.5$ é um estimador de máxima verossimilhança para θ. Em particular: $T_1 = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$, $T_2 = \frac{4X_{(1)} + 2X_{(n)} + 1}{6}$,
$T_3 = \frac{2X_{(1)} + 4X_{(n)} - 1}{6}$
são 3 possíveis estimadores de máxima verossimilhança. Logo, unicidade **não é**, em geral, uma propriedade dos estimadores de máxima verossimilhança.

Problema 5

Considere as densidades do Problema 1. Encontre estimadores por método dos momentos para θ e verifique que eles são consistentes.

Problema 6

Sejam T_1, T_2, T_3 e T_4 estimadores não tendenciosos para um parâmetro desconhecido θ. Suponha que:

$Var(T_1) = ½$, $Var(T_2) = 1/4$, $Var(T_3) =1/8$, $Var(T_4) = 1/8$.

a) Suponha que T_1, T_2, T_3 e T_4 são independentes. Encontre as constantes a_1, a_2, a_3 e a_4 tais que: $T^* = \sum_{i=1}^{4} a_i T_i$ é um estimador não tendencioso para θ e sua variância é mínima.

b) No ítem a) calcule a variância mínima e o percentual de redução da variância conseguido se comparado à variância de $\tilde{T} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} T_i$

Problema 7

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $f(x,\lambda) = \lambda . e^{-\lambda x}$. A média de X_i é $1/\lambda$ e assim $T = 1/\overline{X}$ é um estimador "natural" de λ.

a) Calcule $E(T) = E\{1/\overline{X}\}$ e construa a partir dele um estimador não tendencioso de λ.

b) Mostre que o múltiplo de $1/\overline{X}$ com menor erro quadrático médio é: $\left(\frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{1}{\overline{X}}\right)$.

Problema 8

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid Unif$(0, \theta)$. Seja $Y = \text{máx}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Mostre que a densidade de Y é $f(y) = \frac{n.y^{n-1}}{\theta^n}$ onde $0 < y < \theta$.

b) Mostre que Y é um estimador consistente de θ.

c) Encontre um múltiplo de $\overline{X}$ que seja não tendencioso para θ e calcule o seu erro quadrático médio.

d) Encontre um múltiplo de $X_{(n)}$ que seja não tendencioso para θ e calcule o seu erro quadrático médio.
e) Compare os erros quadráticos médios dos estimadores encontrados em c) e d) acima.

Problema 9

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid $N(\mu, 1)$.
Encontre uma função de $\overline{X}$ que seja um estimador não tendencioso de μ^2.
Dica: Considere $\overline{X}^2 - \frac{1}{n}$

Problema 10

Gere 500 amostras de 10 observações cada da densidade Unif(0,2). Em cada amostra, calcule $X_{(10)} = \text{máx}(X_1, X_2, \dots, X_{10})$. Faça o histograma dos $X_{(10)}$ gerados e calcule a média e mediana da distribuição simulada.

Problema 11

Considere uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição Geométrica(p).
a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de p.
b) Encontre a informação de Fisher.
c) O MLE é consistente? É não tendencioso?
c) Ache o limite inferior de Cramer e Rao para o estimador de p.