IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2005.01 – turma A
Teste 1 – 05/05/2005
GABARITO

PROBLEMA 1 (30 pontos)

Em cada questão abaixo, indique se a afirmativa é **verdadeira** ou **falsa** (marque um X na alternativa correta). Não é necessário justificar a sua resposta.

		Verdadeiro	Falso
1	A função de distribuição de uma v.a. contínua é necessariamente contínua.	**XXXX**	
2	A função de probabilidade pode ser escrita como uma tabela que relaciona cada valor de X à sua probabilidade.	**XXXX**	
3	A função de probabilidade é a derivada da função de distribuição.		**XXXX**
4	O primeiro momento central de uma variável aleatória é sempre nulo.	**XXXX**	
5	Na densidade Exponencial, se [a, b] e [c,d] são intervalos do mesmo comprimento, suas probabilidades são iguais.		**XXXX**
6	A variância de X é a 2ª. derivada da função geradora de momentos em t = 0.		**XXXX**
7	A função geradora de momentos sempre existe.		**XXXX**
8	Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidades Exponencial(2) e Exponencial(3) respectivamente. Então X e Y têm a mesma função geradora de momentos.		**XXXX**
9	Pode-se dizer que E(4.X+ 2) = 4E(X) + 2 e VAR(4.X+ 2) = 16.VAR(X) + 2		**XXXX**
10	O número de questões "chutadas" certo numa prova de múltipla escolha em que você não sabe nada (por exemplo, a prova está numa língua que você não conhece) é uma variável Binomial onde n é o número de questões e p = 1/(número de opções em cada questão da prova), suposto constante.	**XXXX**	
11	O tempo entre chegadas de pessoas numa bilheteria de cinema é uma variável Poisson.	**XXXX**	

		Verdadeiro	Falso
12	As probabilidades de ganhar na Mega-Sena podem ser calculadas através da distribuição Geométrica.		**XXXX**
13	A covariância entre X e Y é um número adimensional entre -1 e + 1.		**XXXX**
14	Quando usamos o retorno aritmético diário, o preço de uma ação amanhã pode ser encarado como uma variável lognormal.		**XXXX**
15	Pelo teorema central do limite podemos aproximar uma variável Binomial por uma variável Poisson.		**XXXX**

Problema 2 (20 pontos)

Seja X uma variável aleatória contínua com densidade f(x) = cx onde 0 < x < 4.
a) Ache a constante <u>c</u> que faz de f(x) uma densidade.
b) Encontre a função de distribuição de X.
c) Ache a média, a variância e o desvio padrão de X.
d) Encontre um ponto m no intervalo (0,4) tal que Pr(X > m) = Pr(X ≤ m) = 50%. Este ponto é a *mediana* da distribuição.

Solução

a) $\int_0^4 cxdx = 1 \Rightarrow c\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = c(8) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{8}$

b) F(x) = 0 se x < 0 e F(x) = 1 se x > 4
Para X no intervalo [0,4]:

$$F(x) = \int_0^x \frac{u}{8}du = \frac{x^2}{16}$$

c) A média é:

$$E(X) = \int_0^4 x\frac{1}{8}xdx = \frac{1}{8}\left.\left(\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^4 = \frac{64}{8(3)} = \frac{8}{3} = 2.666.....$$

O segundo momento é:

$$E(X^2) = \int_0^4 x^2\frac{1}{8}xdx = \frac{1}{8}\left.\left(\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^4 = \frac{256}{8(4)} = 8$$

A variância é:

$$VAR(X) = 8 - (8/3)^2 = (72 - 64)/9 = 8/9$$

O desvio padrão é:
dp(X) = √8/3

d) A mediana é tal que: Pr(X ≤ m) = F(m) = 0.5. Logo, pelos resultados do item b):

$$\frac{m^2}{16} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 = 8 \Leftrightarrow m = \sqrt{8} = 2.8284$$

Problema 3 (20 pontos)

Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade Geométrica(p), isto é: $\Pr(X = x) = q^{x-1}\text{p} \quad \text{onde x} = 1,2,....$

Encontre a função geradora de momentos de X e, a partir dela, mostre que E(X) = 1/p.

Solução

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^{x-1} p = pq^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} \left(e^t q\right)^x = pq^{-1}\left\{\frac{e^t q}{1-e^t q}\right\} = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$ e a fgm existe se $|qe^t| < 1$.

A primeira derivada da fgm é:

$$M'(t) = \frac{pe^t\left(1-qe^t\right) - \left(-qe^t\right)pe^t}{\left(1-qe^t\right)^2} = \frac{pe^t}{\left(1-qe^t\right)^2}$$

A média é encontrada avaliando-se esta primeira derivada em t = 0.

$$E(X) = M'(0) = \frac{p}{\left(1-q\right)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Problema 4 (30 pontos)

Uma empresa administra dois shopping-centers localizados em diferentes áreas da cidade.
No ***primeiro shopping*** verificou-se que um consumidor gasta em média R$ 600,00 em compras de Natal. A dispersão entre os valores gastos, medida pelo desvio padrão, é R$ 240,00.

No ***segundo shopping***, o gasto médio por consumidor em compras de Natal é R$ 400,00 e o desvio padrão dos gastos é R$ 160,00.

Além disso, pode-se encarar os valores gastos em compras de Natal pelos consumidores nos dois shoppings como variáveis Normais correlacionadas, com coeficiente de correlação + 0.60.

a) A empresa controladora pretende oferecer um cartão VIP aos clientes que consomem muito no ***primeiro shopping***. Apenas os 1% que **mais consomem** no período de Natal receberão o cartão. Acima de qual volume de compras um consumidor se candidata ao cartão VIP?

b) Qual a probabilidade de um consumidor gastar entre R$ 400 e R$ 840 em compras de Natal ***no primeiro shopping?***

c) Qual a probabilidade de um consumidor gastar entre R$ 400 e R$ 840 em compras de Natal ***no primeiro shopping sabendo que um consumidor com perfil semelhante gastou R$ 560 no segundo shopping?***

d) Qual a probabilidade de um consumidor gastar entre R$ 400 e R$ 840 em compras de Natal ***no primeiro shopping sabendo que um consumidor com perfil semelhante gastou R$ 200 no segundo shopping?***

e) Qual a **distribuição de probabilidade** dos gastos de um consumidor no 2° shopping **sabendo que um consumidor semelhante gastou R$ 960 no primeiro shopping?**

f) Qual a **distribuição de probabilidade** dos gastos de um consumidor no 2° shopping **sabendo que um consumidor semelhante gastou R$ 480 no primeiro shopping?**

Solução

Gasto no 1°. shopping: X ~ N(600, $(240)^2$)
Gasto no 2°. shopping: Y ~ N(400, $(160)^2$)
Correlação: ρ = 0.60

a) VIPs = 1% que mais consomem no 1°. shopping
Em termos de uma variável Normal padrão, é o ponto tal que $\Phi(z) = 0.99$, ou seja, é z = 2.3263 (da tabela da Normal).

Logo:

$$\frac{X-600}{240} = 2.3263 \Leftrightarrow X = 600 + 240(2.3263) \Leftrightarrow X = R\$1158.31$$

Um cliente será considerado VIP no 1°. shopping se suas compras de Natal excederem R$ 1158.31.

b)

$$\Pr(400 < X < 840) = \Pr\left(\frac{400-600}{240} < \frac{X-600}{240} < \frac{840-600}{240}\right) = \Pr(-0.8333 < Z < 1) = 0.8413 - 0.2023 = 0.6390$$

$$c)\ \Pr(400 < X < 840 | Y = 560) = ???$$

Esta é uma densidade condicional, que é também Normal, e seus parâmetros são:
μ = 600 + 0.60(240/160)(560 – 400) = 744
$\sigma^2 = (240)^2.(1 - (0.6)^2) = (192)^2$

$$\Pr(400 < X < 840 | Y = 560) = \Pr\left(\frac{400-744}{192} < \frac{X-744}{192} < \frac{840-744}{192}\right) = \Phi(0.5000) - \Phi(-1.7917) = 0.6549$$

$$d)\ \Pr(400 < X < 840 | Y = 200) = ???$$

Esta é uma densidade condicional, que é também Normal, e seus parâmetros são:
μ = 600 + 0.60(240/160)(200 – 400) = 420
$\sigma^2 = (240)^2.(1 - (0.6)^2) = (192)^2$

$$\Pr(400 < X < 840 | Y = 200) = \Pr\left(\frac{400-420}{192} < \frac{X-420}{192} < \frac{840-420}{192}\right) = \Phi(2.1875) - \Phi(-0.1042) = 0.5271$$

e) Qual a **distribuição de probabilidade** dos gastos de um consumidor no 2° shopping **sabendo que um consumidor semelhante gastou R$ 960 no primeiro shopping?**

Esta é uma densidade condicional, que é também Normal, e seus parâmetros são:
μ = 400 + 0.60(160/240)(960 – 600) = 544
$\sigma^2 = (160)^2.(1 - (0.6)^2) = 16384 = (128)^2$

Logo, a densidade condicional de Y dado X = 960 é Normal (544, $(128)^2$)

f) Qual a **distribuição de probabilidade** dos gastos de um consumidor no 2° shopping **sabendo que um consumidor semelhante gastou R$ 480 no primeiro shopping?**

Esta é uma densidade condicional, que é também Normal, e seus parâmetros são:
$\mu = 400 + 0.60(160/240)(480 - 600) = 352$
$\sigma^2 = (160)^2.(1 - (0.6)^2) = 16384 = (128)^2$
Logo, a densidade condicional de Y dado X = 960 é Normal (352, $(128)^2$)

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0,0000	50,00%		0,9900	83,89%		2,0125	97,79%
0,0200	50.80%		1,0000	84,13%		2.0200	97.83%
0,0300	51.20%		1,0100	84.38%		2.0300	97.88%
0,0400	51.60%		1.0167	84.54%		2.0400	97.93%
0,0500	51,99%		1.0250	84.73%		2.0412	97.94%
0,1000	53,98%		1,0500	85,31%		2.0500	97.98%
0,1042	54,15%		1,0553	85,44%		2,1000	98,21%
0,1500	55,96%		1,1000	86,43%		2,1500	98,42%
0,2000	57,93%		1,1180	86,82%		2,1875	98,56%
0,2236	58,85%		1,1475	87,44%		2,2000	98,61%
0,2500	59,87%		1,1500	87,49%		2,2361	98,73%
0,3000	61,79%		1,1553	87,60%		2,3000	98,93%
0,3015	61,85%		1,2000	88,49%		2,3263	99,00%
0,3475	63,59%		1,2060	88,61%		2,3333	99,02%
0,3500	63,68%		1,2200	88,88%		2,4000	99,18%
0,4000	65,54%		1,2500	89,44%		2,5000	99,38%
0.4167	66.16%		1.2700	89.79%		2,5500	99,46%
0,4307	66,67%		1,2816	90,00%		2,5628	99,48%
0,4500	67,36%		1,3000	90,32%		2,6000	99,53%
0,5000	69,15%		1,3333	90,88%		2,6500	99,60%
0,5500	70,88%		1,3750	91.54%		2,6667	99,62%
0,5774	71.81%		1,4000	91,92%		2,6833	99,64%
0,6000	72,57%		1,4468	92,60%		2,7000	99,65%
0,6250	73,40%		1,4500	92,65%		2.7500	99.70%
0,6500	74,22%		1,5000	93,32%		2,8000	99,74%
0,6667	74,75%		1,5500	93,94%		2,9000	99,81%
0,6708	74,88%		1,5811	94,31%		2,9500	99,84%
0,7000	75,80%		1,6000	94,52%		3,0000	99,87%
0,7500	77,34%		1,6450	95,00%		3,1000	99,90%
0,8000	78,81%		1,6667	95,22%		3,1500	99,92%
0,8100	79,10%		1,7000	95,54%		3,2000	99,93%
0,8200	79,39%		1,7500	95,99%			
0,8333	79.77%		1,7917	96,34%			
0,8500	80,23%		1,8000	96,41%			
0.8666	80.69%		1.8500	96.78%			
0,8944	81,45%		1,9000	97,13%			
0,9000	81,59%		1.9500	97.44%			
0,9167	82,03%		1,9600	97,50%			
0,9500	82,89%		1,9800	97,61%			
0,9500	82,89%		2,0000	97,72%			
0,9750	83,52%		2,0100	97,78%			
0,9800	83,65%						