IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2005.01 – turma B
Teste 1 – 06/05/2005
GABARITO

PROBLEMA 1 (30 pontos)

Em cada questão abaixo, indique se a afirmativa é **verdadeira** ou **falsa** (marque um X na alternativa correta). Não é necessário justificar a sua resposta.

		Verdadeiro	Falso
1	A função de distribuição de uma v.a. discreta não é contínua.	XXXX	
2	O logaritmo de uma variável normal é uma variável lognormal.		XXXX
3	A função densidade de probabilidade é a derivada da função de distribuição.	XXXX	
4	O primeiro momento central de uma variável aleatória é sempre nulo.	XXXX	
5	Na densidade Uniforme, se [a, b] e [c,d] são intervalos do mesmo comprimento, suas probabilidades são iguais.	XXXX	
6	A variância de X é a 2ª. derivada da função geradora de momentos em t = 0.		XXXX
7	A função geradora de momentos sempre existe.		XXXX
8	Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidades Poisson(2) e Poisson(3) respectivamente. Então X e Y têm a mesma função geradora de momentos.		XXXX
9	Pode-se dizer que E(4.X+ 2) = 4E(X) + 2 e VAR(4.X+ 2) = 16.VAR(X)	XXXX	
10	O número de questões "chutadas" certo numa prova de múltipla escolha em que você não sabe nada (por exemplo, a prova está numa língua que você não conhece) é uma variável Binomial onde n é o número de questões e p = 1/(número de opções em cada questão da prova), suposto constante.	XXXX	
11	O tempo entre chegadas de pessoas numa bilheteria de cinema é uma variável Poisson.	XXXX	

		Verdadeiro	Falso
12	As probabilidades de ganhar na Mega-Sena podem ser calculadas através da distribuição Hipergeométrica.	**XXXX**	
13	O coeficiente de correlação entre X e Y é um número adimensional entre -1 e + 1.	**XXXX**	
14	Quando usamos o retorno geométrico diário, o preço de uma ação amanhã pode ser encarado como uma variável lognormal.	**XXXX**	
15	Pelo teorema central do limite podemos aproximar uma variável Binomial por uma variável Normal.	**XXXX**	

Problema 2 (20 pontos)

Seja X uma variável aleatória lognormal(μ, σ^2).
Mostre que E(X) = exp($\mu + \sigma^2/2$)

Dica: Lembre-se da função geradora de momentos de uma variável Normal. Se Y é Normal(μ, σ^2) então sua fgm é: M(t) = exp($\mu.t + \sigma^2 t^2/2$)

Solução

Pode-se escrever X como exp(Y) onde Y é Normal(μ, σ^2). Então:

$$E(X) = E\left(e^Y\right) = M_Y(1) = \exp\left\{\mu(1) + \frac{\sigma^2 (1)^2}{2}\right\} = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

Problema 3 (20 pontos)

Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade Binomial(n, p), isto é:

$$\Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad \text{onde } x = 0,1,2,\ldots.,n$$

Encontre a função geradora de momentos de X e, a partir dela, mostre que E(X) = n.p.

Solução

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(pe^t\right)^x q^{n-x} = \left(pe^t + q\right)^n$$ onde na última passagem usamos o teorema Binomial.

A média de X é a primeira derivada da fgm avaliada em t = 0:

$$M'(t) = n\left(pe^t + q\right)^{n-1} pe^t$$

$$E(X) = M'(0) = n\left(p+q\right)^{n-1} p = n(1)p = n.p$$

Problema 4 (30 pontos)

Considere os preços do litro das gasolinas aditivada e premium nos postos. Uma amostra de postos revela que os preços por litro da gasolina **aditivada** têm distribuição Normal com média R$ 2.50 e desvio padrão R$ 0,15. Os preços por litro da gasolina **premium** têm distribuição Normal com média 2,65 e desvio padrão R$ 0,20. A correlação entre os preços das duas gasolinas é 80%. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De alguém pagar entre R$ 2,35 e R$ 2,65 por um litro de gasolina aditivada.
b) De alguém pagar entre R$ 2,35 e R$ 2,65 por um litro de gasolina aditivada sabendo que neste posto o litro da gasolina premium custa R$ 2,75.
c) De alguém pagar entre R$ $ 2,35 e R$ 2,65 por um litro de gasolina aditivada sabendo que neste posto o litro da gasolina premium custa R$ 2,45.
d) Qual é a distribuição condicional dos preços da gasolina premium sabendo que o preço praticado da gasolina aditivada é R$ 2,65 por litro?
e) Qual é a distribuição condicional dos preços da gasolina premium sabendo que o preço praticado da gasolina aditivada é R$ 2.32 por litro?
f) Quanto um posto deve cobrar por litro para que a sua gasolina aditivada esteja entre as 10% mais baratas?

Solução

Sejam X o preço da gasolina aditivada e Y o preço da gasolina premium. Então X é N(2.50, 0.15^2) e Y é N(2.65, 0.20^2), e a correlação entre os dois preços é 0.8.

a) A probabilidade de um litro de gasolina aditivada custar entre 2.35 e 2.65 é:

$$\Pr\left(2.35 < X < 2.65\right) = \Pr\left(\frac{2.35-2.50}{0.15} < \frac{X-2.50}{0.15} < \frac{2.65-2.50}{0.15}\right) =$$
$$= \Pr\left(-1 < Z < 1\right) = \Phi\left(1\right) - \Phi\left(-1\right) = \Phi\left(1\right) - 1 + \Phi\left(1\right) = 2\Phi\left(1\right) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6827$$

b) A probabilidade da gasolina aditivada custar entre R$ 2,35 e R$ 2,65 por litro sabendo que neste posto o litro da gasolina premium custa R$ 2,75 é obtida a partir da densidade condicional:

$$N\left(\mu_X+\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(y-\mu_Y\right),\sigma_X{}^2\left(1-\rho^2\right)\right)=$$
$$=N\left(2.50+0.8\frac{0.15}{0.20}\left(2.75-2.65\right),(0.15)^2\left(1-0.8^2\right)\right)=$$
$$=N\left(2.56,(0.15)^2\left(0.6\right)^2\right)=N\left(2.56,(0.09)^2\right)$$

$$\Pr\left(2.35<X<2.65\middle|Y=2.75\right)=\Pr\left(\frac{2.35-2.56}{0.09}<\frac{X-2.56}{0.09}<\frac{2.65-2.56}{0.09}\right)=$$
$$=\Pr\left(-2.3333<Z<1\right)=\Phi\left(1\right)-\Phi\left(-2.3333\right)=0.8413-(1-\Phi\left(+2.3333\right))=$$
$$=0.8413-0.0098=0.8315$$

c) A probabilidade da gasolina aditivada custar entre R$ 2,35 e R$ 2,65 por litro sabendo que neste posto o litro da gasolina premium custa R$ 2,45 é obtida a partir da densidade condicional:

$$N\left(\mu_X+\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(y-\mu_Y\right),\sigma_X{}^2\left(1-\rho^2\right)\right)=$$
$$=N\left(2.50+0.8\frac{0.15}{0.20}\left(2.45-2.65\right),(0.15)^2\left(1-0.8^2\right)\right)=$$
$$=N\left(2.38,(0.15)^2\left(0.6\right)^2\right)=N\left(2.38,(0.09)^2\right)$$

$$\Pr\left(2.35<X<2.65\middle|Y=2.45\right)=\Pr\left(\frac{2.35-2.38}{0.09}<\frac{X-2.38}{0.09}<\frac{2.65-2.38}{0.09}\right)=$$
$$=\Pr\left(-0.3333<Z<3\right)=\Phi\left(3\right)-\Phi\left(-0.3333\right)=0.9987-(1-\Phi\left(+0.3333\right))=$$
$$=0.9987-0.3694=0.6292$$

d) A distribuição condicional dos preços da gasolina premium sabendo que o preço praticado da gasolina aditivada é R$ 2,65 por litro é:

$$N\left(\mu_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x-\mu_X\right),\sigma_Y{}^2\left(1-\rho^2\right)\right)=$$
$$=N\left(2.65+0.8\frac{0.20}{0.15}\left(2.65-2.50\right),(0.20)^2\left(1-0.8^2\right)\right)=$$
$$=N\left(2.81,(0.20)^2\left(0.6\right)^2\right)=N\left(2.81,(0.12)^2\right)$$

e) A distribuição condicional dos preços da gasolina premium sabendo que o preço praticado da gasolina aditivada é R$ 2,32 por litro é:

$$N\left(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x-\mu_X\right), {\sigma_Y}^2\left(1-\rho^2\right)\right) =$$
$$= N\left(2.65+0.8\frac{0.20}{0.15}\left(2.32-2.50\right), (0.20)^2\left(1-0.8^2\right)\right) =$$
$$= N\left(2.458, (0.20)^2\left(0.6\right)^2\right) = N\left(2.458, (0.12)^2\right)$$

f) Quanto um posto deve cobrar por litro para que a sua gasolina aditivada esteja entre as 10% mais baratas?

Em termos da distribuição N(0,1), o percentil 10% é o ponto tal que a probabilidade de estar abaixo dele é 10%, e é um número negativo. Este é o número que procuramos, mas a tabela da N(0,1) só fornece valores positivos, logo devemos usar a simetria da N(0,1). Por simetria, procure o ponto tal que a probabilidade de estar ACIMA dele é 10% (ou seja, $\Phi(z)$ = 90% e tome o seu inverso. Logo, z = 1.2816 e o percentil 10% é -1.2816.

Em termos da distribuição dos preços da gasolina aditivada:

$$\frac{X-2.50}{0.15} = -1.2816 \Leftrightarrow X = 2.3078$$

Logo, se o litro da gasolina aditivada estiver abaixo de R$ 2.3078, o posto será um dos 10% mais baratos.

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0,0000	50,00%		0,9800	83,65%		2,0125	97,79%
0,0200	50.80%		0,9900	83,89%		2.0200	97.83%
0,0300	51.20%		1,0000	84,13%		2.0300	97.88%
0,0400	51.60%		1,0100	84.38%		2.0400	97.93%
0,0500	51,99%		1.0167	84.54%		2.0412	97.94%
0,1000	53,98%		1.0250	84.73%		2.0500	97.98%
0,1500	55,96%		1,0500	85,31%		2,1000	98,21%
0,2000	57,93%		1,0553	85,44%		2,2000	98,61%
0,2236	58,85%		1,1000	86,43%		2,2361	98,73%
0,2500	59,87%		1,1180	86,82%		2,3000	98,93%
0,3000	61,79%		1,1475	87,44%		2,3263	99,00%
0,3015	61,85%		1,1500	87,49%		2,3333	99,02%
0,3333	63,06%		1,1553	87,60%		2,4000	99,18%
0,3475	63,59%		1,2000	88,49%		2,5000	99,38%
0,3492	63,65%		1,2060	88,61%		2,5500	99,46%
0,3500	63,68%		1,2200	88,88%		2,5628	99,48%
0,4000	65,54%		1,2500	89,44%		2,6000	99,53%
0.4167	66.16%		1.2700	89.79%		2,6500	99,60%
0,4307	66,67%		1,2816	90,00%		2,6667	99,62%
0,4500	67,36%		1,3000	90,32%		2,6833	99,64%
0,5000	69,15%		1,3333	90,88%		2,7000	99,65%
0,5500	70,88%		1,3750	91.54%		2.7500	99.70%
0,5774	71.81%		1,4000	91,92%		2,8000	99,74%
0,6000	72,57%		1,4468	92,60%		2,9000	99,81%
0,6250	73,40%		1,4500	92,65%		2,9500	99,84%
0,6500	74,22%		1,5000	93,32%		3,0000	99,87%
0,6667	74,75%		1,5500	93,94%		3,1000	99,90%
0,6708	74,88%		1,5811	94,31%		3,1500	99,92%
0,7000	75,80%		1,6000	94,52%		3,2000	99,93%
0,7500	77,34%		1,6450	95,00%			
0,8000	78,81%		1,6667	95,22%			
0,8333	79.77%		1,7000	95,54%			
0,8500	80,23%		1,8000	96,41%			
0.8666	80.69%		1.8500	96.78%			
0,8944	81,45%		1,9000	97,13%			
0,9000	81,59%		1.9500	97.44%			
0,9167	82,03%		1,9600	97,50%			
0,9500	82,89%		1,9800	97,61%			
0,9600	83,15%		1,9900	97.67%			
0,9700	83,40%		2,0000	97,72%			
0,9750	83,52%		2,0100	97,78%			