

IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2005.01 – turma B
Teste 2 – 10/06/2005
GABARITO

PROBLEMA 1 (20 pontos)

Em cada questão abaixo, indique se a afirmativa é **verdadeira** ou **falsa** (marque um X na alternativa correta). Não é necessário justificar a sua resposta.

| | | Verdadeiro | Falso |
|----|--|------------|-------|
| 1 | A correção de continuidade é feita em todas as aplicações do Teorema Central do Limite | | XXX |
| 2 | Em Estatística os parâmetros de uma densidade são desconhecidos. | XXX | |
| 3 | A densidade t de Student é simétrica em torno de zero. | XXX | |
| 4 | Na estimação pontual buscamos encontrar um intervalo que contenha o parâmetro θ com uma probabilidade especificada. | | XXX |
| 5 | Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma densidade com média a e variância b . Então a média amostral tem também média a e sua variância é b/n . | XXX | |
| 6 | O princípio de invariância do MLE garante que, se T é o MLE para θ , então $g(T)$ é não tendencioso para $g(\theta)$. | | XXX |
| 7 | Um estimador é consistente se seu erro quadrático médio tende a zero quando o tamanho da amostra cresce indefinidamente. | XXX | |
| 8 | Não existem estimadores não tendenciosos com variância menor que o limite inferior de Cramér e Rao. | XXX | |
| 9 | O método de momentos fornece estimadores únicos. | | XXX |
| 10 | O método de momentos não necessariamente fornece estimadores iguais aos de máxima verossimilhança. | XXX | |

Problema 2 (10 pontos)

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n iid Poisson(1). Seja Y a soma dos X 's. Aproxime, com base no Teorema Central do Limite, as seguintes probabilidades:

a) $\Pr(Y \leq 27)$ onde Y é a soma de 25 X_i 's

b) $\Pr(Y > 48)$ onde Y é a soma de 36 X_i 's

Solução

$$a) \Pr(Y \leq 27) = \Pr\left(\frac{Y - 25}{\sqrt{25}} \leq \frac{27 - 25}{\sqrt{25}}\right) \approx \Phi\left(\frac{27 - 25}{\sqrt{25}}\right) = \Phi(0.4000) = 0.6554$$

$$b) \Pr(Y > 48) = \Pr\left(\frac{Y - 36}{\sqrt{36}} > \frac{48 - 36}{\sqrt{36}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{48 - 36}{\sqrt{36}}\right) = 1 - \Phi(2) = 0.9773 = 0.0227$$

Problema 3 (30 pontos)

Considere uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição Poisson(θ), ou seja, a função de probabilidade de cada X_i é dada por:

$$\Pr(X = x) = f(x) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \dots$$

a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ .

b) Encontre o MLE de $\Pr(X > 1)$.

c) Encontre a informação de Fisher sobre θ .

Dica: Série de Taylor da Exponencial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Dica 2: Se X tem distribuição Poisson(θ) então $E(X) = \theta = \text{VAR}(X)$

Solução

$$a) L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum_i x_i}}{\prod_i x_i!}$$

$$l(\theta) = \log L(\theta) = -n\theta + \sum_i x_i \{\log(\theta)\} - \log\left\{\prod_i x_i!\right\}$$

$$\frac{dl}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow -n + \frac{\sum_i x_i}{\theta} = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \bar{X}$$

b) $\Pr(X > 1) = \Pr(X = 2) + \Pr(X = 3) + \dots = 1 - \Pr(X = 0) - \Pr(X = 1) = 1 - e^{-\theta} - \theta e^{-\theta} = 1 - (1 + \theta)e^{-\theta}$

Pelo princípio de invariância do MLE, o estimador de máxima verossimilhança de $\Pr(X > 1)$ é:

$$1 - (1 + \bar{X})e^{-\bar{X}}$$

c) A informação de Fisher sobre θ é:

$$I(\theta) = -E\left\{\frac{d^2 l}{d\theta^2}\right\} = -E\left\{\frac{d}{d\theta}\left(-n + \frac{n\bar{X}}{\theta}\right)\right\} = -E\left\{\frac{n\bar{X}(-1)}{\theta^2}\right\} = \frac{1}{\theta^2} E\{n\bar{X}\} = \frac{n\theta}{\theta^2} = \frac{n}{\theta} = \frac{1}{\text{VAR}(\bar{X})}$$

Problema 4 (40 pontos)

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n iid $N(\mu, 2)$. Ou seja, a densidade de cada X_i é:

$$f(x_i, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2(2)\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2(2)}[x_i - \mu]^2\right\} \text{ para } X_i \text{ um número real.}$$

- Encontre o MLE de μ .
- Mostre que o MLE é não tendencioso.
- Mostre que o MLE é consistente.
- Calcule a informação de Fisher.
- Calcule o limite inferior de Cramer e Rao. O MLE é um estimador eficiente?
- Encontre um estimador por método de momentos de μ .
- Encontre, a partir da média amostral, um estimador não tendencioso de μ^2 .

Solução

$$a) L(\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2(2)\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2(2)}[x_i - \mu]^2\right\} = (4\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n [x_i - \mu]^2\right\}$$

$$\begin{aligned} l(\mu) &= \log L(\mu) = -\frac{n}{2} \log(4\pi) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n [x_i - \mu]^2 = -\frac{n}{2} \log(4\pi) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2] = \\ &= -\frac{n}{2} \log(4\pi) - \frac{1}{4} \left\{ \sum_i x_i^2 - 2\mu \sum_i x_i + n\mu^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{dl}{d\mu} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \frac{d}{d\mu} \left\{ \sum_i x_i^2 - 2\mu \sum_i x_i + n\mu^2 \right\} = 0 \Leftrightarrow -2 \sum_i x_i + 2n\mu = 0 \Leftrightarrow -n\bar{X} + n\mu = 0 \Leftrightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$$

b) O MLE é não tendencioso pois \bar{X} é Normal com média μ e variância $2/n$.

c) O erro quadrático médio do MLE é apenas a sua variância neste caso, pois o estimador é não tendencioso. Do item acima, a variância do MLE é $2/n$, que tende a zero quando n tende a infinito. Logo, o erro quadrático médio vai a zero quando n tende a infinito e o estimador é consistente.

d) A informação de Fisher é:

$$I(\mu) = -E\left\{\frac{d^2 l}{d\mu^2}\right\} = -E\left\{\frac{d}{d\mu}\left[-\frac{1}{4}\frac{d}{d\mu}\left\{\sum_i x_i^2 - 2\mu\sum_i x_i + n\mu^2\right\}\right]\right\} = +\frac{1}{4}(2n) = \frac{n}{2} = \frac{1}{\text{VAR}(\bar{X})}$$

e) Calcule o limite inferior de Cramer e Rao. O MLE é um estimador eficiente?

O limite inferior de Cramer e Rao é:

$CRLB = \frac{1}{I(\mu)} = \frac{2}{n} = \text{VAR}(\bar{X})$ e portanto o MLE atinge o limite inferior de Cramer e Rao e é um estimador eficiente.

f) Um estimador por método de momentos de μ é obtido fazendo-se:

$$\frac{1}{n}\sum_i X_i = \bar{X} = E(X_i) = \mu \Leftrightarrow \tilde{\mu} = \bar{X} \text{ e coincide com o estimador de máxima verossimilhança.}$$

g) Um estimador tentativo de μ^2 é \bar{X}^2 . Mas, $E(\bar{X}) = \mu$ e $\text{VAR}(\bar{X}) = \frac{2}{n}$

Logo, $\text{VAR}(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \mu^2 = \frac{2}{n} \Leftrightarrow E(\bar{X}^2) = \mu^2 + \frac{2}{n}$ e um estimador não tendencioso de μ^2 pode

ser obtido fazendo-se: $\bar{X}^2 - \frac{2}{n}$.

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

| z | $\Phi(z)$ | | z | $\Phi(z)$ | | z | $\Phi(z)$ |
|--------|-----------|--|--------|-----------|--|--------|-----------|
| 0,0000 | 50,00% | | 0,9800 | 83,65% | | 2,0125 | 97,79% |
| 0,0200 | 50,80% | | 0,9900 | 83,89% | | 2,0200 | 97,83% |
| 0,0300 | 51,20% | | 1,0000 | 84,13% | | 2,0300 | 97,88% |
| 0,0400 | 51,60% | | 1,0100 | 84,38% | | 2,0400 | 97,93% |
| 0,0500 | 51,99% | | 1,0167 | 84,54% | | 2,0412 | 97,94% |
| 0,1000 | 53,98% | | 1,0250 | 84,73% | | 2,0500 | 97,98% |
| 0,1500 | 55,96% | | 1,0500 | 85,31% | | 2,1000 | 98,21% |
| 0,2000 | 57,93% | | 1,0553 | 85,44% | | 2,2000 | 98,61% |
| 0,2236 | 58,85% | | 1,1000 | 86,43% | | 2,2361 | 98,73% |
| 0,2828 | 61,14% | | 1,1180 | 86,82% | | 2,3000 | 98,93% |
| 0,2500 | 59,87% | | 1,1475 | 87,44% | | 2,3263 | 99,00% |
| 0,3000 | 61,79% | | 1,1500 | 87,49% | | 2,3333 | 99,02% |
| 0,3015 | 61,85% | | 1,1553 | 87,60% | | 2,4000 | 99,18% |
| 0,3333 | 63,06% | | 1,2000 | 88,49% | | 2,5000 | 99,38% |
| 0,3475 | 63,59% | | 1,2060 | 88,61% | | 2,5500 | 99,46% |
| 0,3492 | 63,65% | | 1,2200 | 88,88% | | 2,5628 | 99,48% |
| 0,3500 | 63,68% | | 1,2500 | 89,44% | | 2,6000 | 99,53% |
| 0,4000 | 65,54% | | 1,2700 | 89,79% | | 2,6500 | 99,60% |
| 0,4167 | 66,16% | | 1,2816 | 90,00% | | 2,6667 | 99,62% |
| 0,4307 | 66,67% | | 1,3000 | 90,32% | | 2,6833 | 99,64% |
| 0,4500 | 67,36% | | 1,3333 | 90,88% | | 2,7000 | 99,65% |
| 0,5000 | 69,15% | | 1,3750 | 91,54% | | 2,7500 | 99,70% |
| 0,5500 | 70,88% | | 1,4000 | 91,92% | | 2,8000 | 99,74% |
| 0,5774 | 71,81% | | 1,4142 | 92,14% | | 2,9000 | 99,81% |
| 0,6000 | 72,57% | | 1,4500 | 92,65% | | 2,9500 | 99,84% |
| 0,6250 | 73,40% | | 1,5000 | 93,32% | | 3,0000 | 99,87% |
| 0,6500 | 74,22% | | 1,5500 | 93,94% | | 3,1000 | 99,90% |
| 0,6667 | 74,75% | | 1,5811 | 94,31% | | 3,1500 | 99,92% |
| 0,7000 | 75,80% | | 1,6000 | 94,52% | | 3,2000 | 99,93% |
| 0,7500 | 77,34% | | 1,6450 | 95,00% | | | |
| 0,8000 | 78,81% | | 1,6667 | 95,22% | | | |
| 0,8333 | 79,77% | | 1,7000 | 95,54% | | | |
| 0,8500 | 80,23% | | 1,8000 | 96,41% | | | |
| 0,8666 | 80,69% | | 1,8500 | 96,78% | | | |
| 0,8944 | 81,45% | | 1,9000 | 97,13% | | | |
| 0,9000 | 81,59% | | 1,9500 | 97,44% | | | |
| 0,9167 | 82,03% | | 1,9600 | 97,50% | | | |
| 0,9500 | 82,89% | | 1,9800 | 97,61% | | | |
| 0,9600 | 83,15% | | 1,9900 | 97,67% | | | |
| 0,9700 | 83,40% | | 2,0000 | 97,72% | | | |
| 0,9750 | 83,52% | | 2,0100 | 97,78% | | | |