IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2005.02
Teste 1 – 28/09/2005
GABARITO

PROBLEMA 1 (20 pontos)

Seja X uma variável aleatória contínua com densidade $f(x) = cx^2$ onde $0 < x < 3$.

a) Ache a constante c que faz de f(x) uma densidade.

b) Encontre a função de distribuição de X.

c) Ache a média, a variância e o desvio padrão de X.

d) Encontre um ponto m no intervalo (0,3) tal que $Pr(X > m) = Pr(X \leq m) = 50\%$. Este ponto é a *mediana* da distribuição.

Solução

a) $\int_0^3 cx^2 dx = 1 \Rightarrow c\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = c(9) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$

b) F(x) = 0 se x < 0 e F(x) = 1 se x > 3
Para X no intervalo [0,3]:

$$F(x) = \int_0^x \frac{u^2}{9} du = \frac{x^3}{27}$$

c) A média é:

$$E(X) = \int_0^{34} x\frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^3 = \frac{81}{9(4)} = \frac{9}{4} = 2.25$$

O segundo momento é:

$$E(X^2) = \int_0^4 x^2\frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{9}\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^3 = \frac{3(81)}{9(5)} = \frac{27}{5}$$

A variância é:

$$VAR(X) = \frac{27}{5} - (9/4)^2 = \frac{27}{5} - \frac{81}{16} = \frac{432-405}{80} = \frac{27}{80}$$

O desvio padrão é:
$dp(X) = \sqrt{(27/80)}$

d) A mediana é tal que: $Pr(X \leq m) = F(m) = 0.5$. Logo, pelos resultados do item b):

$$\frac{m^3}{27} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^3 = \frac{27}{2} \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{\frac{27}{2}} = 2.3811$$

PROBLEMA 2 (20 pontos)

Você trabalha numa empresa que vende produtos pelo telefone. Apenas 20% das chamadas resultam numa venda. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que a primeira venda ocorra na 6a. ligação telefônica.
b) De que sejam necessárias 12 ligações para que você consiga fazer a terceira venda?
c) Se você faz exatamente 12 chamadas telefônicas, qual a probabilidade de completar exatamente 3 vendas?
d) Se você faz exatamente 20 chamadas telefônicas, qual a probabilidade de completar entre 2 e 4 vendas (inclusive 2 e 4)?

Solução

a) Neste caso X representa a tentativa em que ocorre a 1a. Venda e X é uma variável Geométrica com probabilidade p = 0.2. Logo:

$$\Pr(X = 6) = (0.8)^5 (0.2) = 0.0655$$

b) Aqui a variável de interesse é o número de chamadas até que a 3ª. venda seja concluída, ou seja, trata-se de uma variável Binomial Negativa com parâmetros r = 3 e p = 0.2.

$$\Pr\left(X = 6\right) = \binom{5}{2} (0.9)^3 (0.1)^3 = 0.0073$$

$$\Pr(X = 12) = \binom{11}{2} (0.8)^9 (0.2)^3 = 0.0590$$

c) Neste caso o número de chamadas é fixo a priori e portanto temos uma variável Binomial. X aqui representa o número de chamadas que resultaram em vendas fechadas dentre as 12 repetições realizadas. Então X é Bin(n = 12, p = 0.2).

$$\Pr(X = 3) = \binom{12}{3} (0.2)^3 (0.8)^9 = 0.2362$$

d) O modelo aqui é Binomial(n = 20, p = 0.2) e queremos achar Pr(2 <= X <= 4)

x	Pr(X = x)
2	0.1369
3	0.2054
4	0.2182
soma	**0.5605**

Problema 3 (15 pontos)

Seja X uma variável aleatória lognormal(μ, σ^2).
Mostre que E(X) = exp($\mu + \sigma^2/2$)

Dica: Lembre-se da função geradora de momentos de uma variável Normal. Se Y é Normal(μ, σ^2) então sua fgm é: M(t) = exp($\mu.t + \sigma^2 t^2/2$)

Solução

Pode-se escrever X como exp(Y) onde Y é Normal(μ, σ^2). Então:

$$E(X) = E\left(e^Y\right) = M_Y(1) = \exp\left\{\mu(1) + \frac{\sigma^2 (1)^2}{2}\right\} = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

Problema 4 (15 pontos)

Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade Poisson(λ), isto é: $\Pr\left(X = x\right) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ onde $x = 0,1,2,....$

Encontre a função geradora de momentos de X e, a partir dela, mostre que E(X) = λ

Solução

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^t\right)^x}{x!} = e^{-\lambda}.\exp\left(\lambda e^t\right) = \exp\left(-\lambda + \lambda e^t\right)$$

A primeira derivada da função geradora de momentos é:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{e^{-\lambda}.\exp\left(\lambda e^t\right)\right\} = e^{-\lambda} \lambda e^t \exp\left(\lambda e^t\right)$$

$$\left.\frac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0} = e^{-\lambda} \lambda e^0 \exp\left(\lambda e^0\right) = e^{-\lambda}.\lambda.e^{+\lambda} = \lambda = E(X)$$

Problema 5 (30 pontos)

Considere os preços do litro das gasolinas aditivada e premium nos postos. Uma amostra de postos revela que os preços por litro da gasolina **aditivada** têm distribuição Normal com média **R$ 2,60** e desvio padrão **R$ 0,15**. Os preços por litro da gasolina **premium** têm distribuição Normal com média **2,75** e desvio padrão **R$ 0,20**. A correlação entre os preços das duas gasolinas é 80%. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De alguém pagar entre R$ 2,45 e R$ 2,75 por um litro de gasolina aditivada.
b) De alguém pagar entre R$ 2,45 e R$ 2,75 por um litro de gasolina aditivada sabendo que neste posto o litro da gasolina premium custa R$ 2,95.

c) De alguém pagar entre R$ $ 2,45 e R$ 2,75 por um litro de gasolina aditivada sabendo que neste posto o litro da gasolina premium custa R$ 2,55.

d) Qual é a distribuição condicional dos preços da gasolina premium sabendo que o preço praticado da gasolina aditivada é R$ 2,70 por litro?

e) Quanto um posto deve cobrar por litro para que a sua gasolina aditivada esteja entre as 10% mais baratas?

f) Quanto deve cobrar um posto por litro para que sua gasolina premium esteja entre as 5% mais caras?

Solução

Sejam X o preço da gasolina aditivada e Y o preço da gasolina premium. Então X é $N(2.60, 0.15^2)$ e Y é $N(2.75, 0.20^2)$, e a correlação entre os dois preços é 0.8.

a) A probabilidade de um litro de gasolina aditivada custar entre 2.45 e 2.75 é:

$$\Pr(2.45 < X < 2.75) = \Pr\left(\frac{2.45-2.60}{0.15} < \frac{X-2.60}{0.15} < \frac{2.75-2.60}{0.15}\right) = \Pr(-1 < Z < 1) =$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6827$$

b) A probabilidade da gasolina aditivada custar entre R$ 2,45 e R$ 2,75 por litro sabendo que neste posto o litro da gasolina premium custa R$ 2,95 é obtida a partir da densidade condicional:

$$N\left(\mu_X + \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y), \sigma_X^2(1-\rho^2)\right) =$$
$$= N\left(2.60 + \frac{0.8(0.15)}{0.20}(2.95-2.75), (0.15)^2(1-0.8^2)\right) =$$
$$= N\left(2.72, (0.15)^2(1-0.8^2)\right) = N\left(2.72, (0.09)^2\right)$$

$$\Pr(2.45 < X < 2.75 | Y = 2.95) = \Pr\left(\frac{2.45-2.72}{0.09} < \frac{X-2.72}{0.09} < \frac{2.75-2.72}{0.09}\right) = \Pr(-3 < Z < 0.3333) =$$
$$= \Phi(0.333) - \Phi(-3) = 0.6306 - 0.0013 = 0.6292$$

c) A probabilidade da gasolina aditivada custar entre R$ 2,45 e R$ 2,75 por litro sabendo que neste posto o litro da gasolina premium custa R$ 2,55 é obtida a partir da densidade condicional:

$$N\left(\mu_X + \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y), \sigma_X^2(1-\rho^2)\right) =$$
$$= N\left(2.60 + \frac{0.8(0.15)}{0.20}(2.55-2.75), (0.15)^2(1-0.8^2)\right) =$$
$$= N\left(2.48, (0.15)^2(1-0.8^2)\right) = N\left(2.48, (0.09)^2\right)$$

$$\Pr\left(2.45 < X < 2.75 \middle| Y = 2.55\right) = \Pr\left(\frac{2.45-2.48}{0.09} < \frac{X-2.48}{0.09} < \frac{2.75-2.48}{0.09}\right) = \Pr\left(-0.3333 < Z < 3\right) =$$
$$= \Phi(3) - \Phi(-0.3333) = 0.9987 - 0.3694 = 0.6292$$

d) A distribuição condicional dos preços da gasolina premium sabendo que o preço praticado da gasolina aditivada é R$ 2,70 por litro é:

$$N\left(\mu_Y + \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x - \mu_X\right), \sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right)\right) =$$
$$= N\left(2.75 + \frac{0.8(0.20)}{0.15}\left(2.70 - 2.60\right), (0.20)^2\left(1 - 0.8^2\right)\right) =$$
$$= N\left(2.8567, (0.20)^2\left(1-0.8^2\right)\right) = N\left(2.8567, (0.12)^2\right)$$

e) Quanto um posto deve cobrar por litro para que a sua gasolina aditivada esteja entre as 10% mais baratas?

Em termos da distribuição N(0,1), o percentil 10% é o ponto tal que a probabilidade de estar abaixo dele é 10%, e é um número negativo. Este é o número que procuramos, mas a tabela da N(0,1) só fornece valores positivos, logo devemos usar a simetria da N(0,1). Por simetria, procure o ponto tal que a probabilidade de estar ACIMA dele é 10% (ou seja, $\Phi(z)$ = 90% e tome o seu inverso. Logo, z = 1.2816 e o percentil 10% é -1.2816.

Em termos da distribuição dos preços da gasolina aditivada:

$$\frac{X - 2.60}{0.15} = -1.2816 \Leftrightarrow X = 2.4078$$

Logo, se o litro da gasolina aditivada estiver abaixo de R$ 2.4078, o posto será um dos 10% mais baratos.

f) Quanto deve cobrar um posto por litro para que sua gasolina premium esteja entre as 5% mais caras?

O percentil 95% de uma N(0,1) é 1.645.
Transformando para a distribuição dos preços de gasolina premium temos:
$\dfrac{X - 2.75}{0.20} = +1.6450 \Leftrightarrow X = 3.079$ e então se o preço da gasolina premium estiver acima deste valor, o posto é um dos 5% mais caros.

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0,0000	50,00%		0,9800	83,65%		2,0125	97,79%
0,0200	50.80%		0,9900	83,89%		2.0200	97.83%
0,0300	51.20%		1,0000	84,13%		2.0300	97.88%
0,0400	51.60%		1,0100	84.38%		2.0400	97.93%
0,0500	51,99%		1.0167	84.54%		2.0412	97.94%
0,1000	53,98%		1.0250	84.73%		2.0500	97.98%
0,1500	55,96%		1,0500	85,31%		2,1000	98,21%
0,2000	57,93%		1,0553	85,44%		2,2000	98,61%
0,2236	58,85%		1,1000	86,43%		2,2361	98,73%
0,2500	59,87%		1,1180	86,82%		2,3000	98,93%
0,3000	61,79%		1,1475	87,44%		2,3263	99,00%
0,3015	61,85%		1,1500	87,49%		2,3333	99,02%
0,3333	63,06%		1,1553	87,60%		2,4000	99,18%
0,3475	63,59%		1,2000	88,49%		2,5000	99,38%
0,3492	63,65%		1,2060	88,61%		2,5500	99,46%
0,3500	63,68%		1,2200	88,88%		2,5628	99,48%
0,4000	65,54%		1,2500	89,44%		2,6000	99,53%
0.4167	66.16%		1.2700	89.79%		2,6500	99,60%
0,4307	66,67%		1,2816	90,00%		2,6667	99,62%
0,4500	67,36%		1,3000	90,32%		2,6833	99,64%
0,5000	69,15%		1,3333	90,88%		2,7000	99,65%
0,5500	70,88%		1,3750	91.54%		2.7500	99.70%
0,5774	71.81%		1,4000	91,92%		2,8000	99,74%
0,6000	72,57%		1,4468	92,60%		2,9000	99,81%
0,6250	73,40%		1,4500	92,65%		2,9500	99,84%
0,6500	74,22%		1,5000	93,32%		3,0000	99,87%
0,6667	74,75%		1,5500	93,94%		3,1000	99,90%
0,6708	74,88%		1,5811	94,31%		3,1500	99,92%
0,7000	75,80%		1,6000	94,52%		3,2000	99,93%
0,7500	77,34%		1,6450	95,00%			
0,8000	78,81%		1,6667	95,22%			
0,8333	79.77%		1,7000	95,54%			
0,8500	80,23%		1,8000	96,41%			
0.8666	80.69%		1.8500	96.78%			
0,8944	81,45%		1,9000	97,13%			
0,9000	81,59%		1.9500	97.44%			
0,9167	82,03%		1,9600	97,50%			
0,9500	82,89%		1,9800	97,61%			
0,9600	83,15%		1,9900	97.67%			
0,9700	83,40%		2,0000	97,72%			
0,9750	83,52%		2,0100	97,78%			