IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2006.01
Teste 1 – 04/05/2006
GABARITO

PROBLEMA 1 (10 pontos)

Você quer montar um portfolio com dois ativos. Calcule o retorno médio e o risco (desvio padrão do retorno do portfolio) EM FUNÇÃO DE α (a proporção do ativo A no portfolio) sob as seguintes condições:
Ativo A: retorno médio = 1%, d.p. retorno = 2%
Ativo B: retorno médio = 2%, d.p. retorno = 5%

- **a)** A correlação entre os dois ativos é nula; **(5 pontos)**
- **b)** A correlação entre os dois ativos é -0.1. **(5 pontos)**

Solução

O **retorno médio** do portfolio é, **em qualquer condição**:

E(P) = α.E(A) + (1-α).E(B) = 0.01(α) + 0.02(1-α)

A variância do retorno do portfolio é (em termos de α e ρ, o coeficiente de correlação):

$$VAR(P) = \alpha^2.VAR(A) + (1-\alpha)^2 VAR(B) + 2.\alpha.(1-\alpha)\rho\sqrt{VAR(A)}\sqrt{VAR(B)} =$$
$$= \alpha^2(0.02)^2 + (1-\alpha)^2(0.05)^2 + 2\rho.\alpha(1-\alpha)(0.02)(0.05) =$$
$$= 0.0004\alpha^2 + 0.0025(1-\alpha)^2 + 0.002\rho.\alpha(1-\alpha)$$

O risco do portfolio é o seu desvio padrão, isto é:

$$dp(P) = \sqrt{0.0004\alpha^2 + 0.0025(1-\alpha)^2 + 0.002\rho.\alpha(1-\alpha)}$$

a) Neste caso, ρ = 0 e o risco do portfolio é:

$$dp(P) = \sqrt{0.0004\alpha^2 + 0.0025(1-\alpha)^2}$$

b) Neste caso, ρ = -0.1 e o risco do portfolio é:

$$dp(P) = \sqrt{0.0004\alpha^2 + 0.0025(1-\alpha)^2 - 0.0002.\alpha(1-\alpha)}$$

Problema 2 (20 pontos)

Sejam variáveis independentes e suponha que X_1 é $N(a, \sigma^2)$ e X_2 é $N(b, \sigma^2)$. Usando o método que você preferir, encontre a densidade de $Y = X_1 + X_2$.

Dica: Lembre-se da função geradora de momentos de uma variável Normal. Se Y é Normal(μ, σ^2) então sua fgm é: $M(t) = \exp(\mu.t + \sigma^2 t^2/2)$

Solução

A fgm de uma v.a. Normal(μ, σ^2) é $M(t) = \exp(\mu.t + \sigma^2 t^2/2)$

A fgm de $Y = X_1 + X_2$ é então:

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{tX_1} e^{tX_2}\right)$$ **(10 pontos)**

e pela independência de X_1 e X_2 temos:

$$M_Y(t) = E\left(e^{tX_1} e^{tX_2}\right) = E\left(e^{tX_1}\right).E\left(e^{tX_2}\right) = \exp\left\{a.t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}.\exp\left\{b.t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{(a+b)t + \frac{2\sigma^2 t^2}{2}\right\}$$

Logo, Y é Normal com média a+b e variância $2.\sigma^2$ **(10 pontos)**

Problema 3 (20 pontos)

O salário dos funcionários numa empresa pode ser modelado por uma variável contínua X com a seguinte densidade:

$f(x) = \dfrac{c}{x^2}$ se $1000 \le X \le 8000$

a) Ache a constante c que faz de f(x) uma densidade.
b) Qual o salário médio?
c) Ache o ponto m entre 1000 e 8000 tal que $Pr(X \le m) = 0.50$. Este ponto é a mediana de X, ou seja, o salário mediano dos funcionários desta empresa?

Solução

$$\int_{1000}^{8000} \frac{c}{x^2} dx = \frac{-c}{x}\Bigg|_{1000}^{8000} = -c\left(\frac{1}{8000} - \frac{1}{1000}\right) = -\frac{c}{8000}(1-8) = +\frac{7}{8000}c = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{8000}{7} = 1142.857$$ **(6 pontos)**

b) O salário médio é:

$$\int_{1000}^{8000} cx \frac{1}{x^2} dx = c \int_{1000}^{8000} \frac{dx}{x} = c.\ln(x) \Big|_{1000}^{8000} = c\left\{\ln(8000) - \ln(1000)\right\} = c.\ln(8)$$

(7 pontos)

$$= \frac{8000}{7} \ln(8) = 2376.50$$

c) O salário mediano é tal que:

$$c \int_{1000}^{m} \frac{dx}{x^2} = c.\left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_{1000}^{m} = \frac{8000}{7}\left[\frac{-1}{m} + \frac{1}{1000}\right] = \frac{8000}{7}\left[\frac{m-1000}{1000m}\right] = 0.5$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{7m}\left[m - 1000\right] = 0.5 \Leftrightarrow 8m - 8000 = 3.5m \Leftrightarrow 4.5m = 8000$$

(7 pontos)

$$m = 1777.78$$

Problema 4 (30 pontos)

Uma empresa administra dois shopping-centers localizados em diferentes áreas da cidade.
No ***primeiro shopping*** verificou-se que um consumidor gasta em média R$ 600,00 em compras de Natal. A dispersão entre os valores gastos, medida pelo desvio padrão, é R$ 240,00.

No ***segundo shopping***, o gasto médio por consumidor em compras de Natal é R$ 400,00 e o desvio padrão dos gastos é R$ 160,00.

Além disso, pode-se encarar os valores gastos em compras de Natal pelos consumidores nos dois shoppings como variáveis Normais correlacionadas, com coeficiente de correlação + 0.60.

a) A empresa controladora pretende oferecer um cartão VIP aos clientes que consomem muito no ***primeiro shopping***. Apenas os 1% que **mais consomem** no período de Natal receberão o cartão. Acima de qual volume de compras um consumidor se candidata ao cartão VIP?

b) Qual a probabilidade de um consumidor gastar entre R$ 400 e R$ 840 em compras de Natal ***no primeiro shopping?***

c) Qual a probabilidade de um consumidor gastar entre R$ 400 e R$ 840 em compras de Natal ***no primeiro shopping sabendo que um consumidor com perfil semelhante gastou R$ 560 no segundo shopping?***

d) Qual a probabilidade de um consumidor gastar entre R$ 400 e R$ 840 em compras de Natal ***no primeiro shopping sabendo que um consumidor com perfil semelhante gastou R$ 200 no segundo shopping?***

e) Qual a **distribuição de probabilidade** dos gastos de um consumidor no 2º shopping **sabendo que um consumidor semelhante gastou R$ 960 no primeiro shopping?**

f) Qual a **distribuição de probabilidade** dos gastos de um consumidor no 2º shopping **sabendo que um consumidor semelhante gastou R$ 480 no primeiro shopping?**

g)Qual a média condicional dos gastos de um consumidor no 2° shopping como função de x, onde x é o valor gasto por um consumidor semelhante no 1° shopping?

Solução

Itens a) e b) – 5 pontos cada, os outros 4 pontos cada

Gasto no 1°. shopping: X ~ $N(600, (240)^2)$
Gasto no 2°. shopping: Y ~ $N(400, (160)^2)$
Correlação: $\rho = 0.60$

a) VIPs = 1% que mais consomem no 1°. shopping
Em termos de uma variável Normal padrão, é o ponto tal que $\Phi(z) = 0.99$, ou seja, é z = 2.3263 (da tabela da Normal).

Logo:

$$\frac{X-600}{240} = 2.3263 \Leftrightarrow X = 600 + 240(2.3263) \Leftrightarrow X = R\$1158.31$$

Um cliente será considerado VIP no 1°. shopping se suas compras de Natal excederem R$ 1158.31.

$$b)\Pr(400 < X < 840) = \Pr\left(\frac{400-600}{240} < \frac{X-600}{240} < \frac{840-600}{240}\right) =$$
$$= \Pr(-0.8333 < Z < 1) = 0.8413 - 0.2023 = 0.6390$$

$$c)\Pr(400 < X < 840 | Y = 560) = ???$$

Esta é uma densidade condicional, que é também Normal, e seus parâmetros são:
$\mu = 600 + 0.60(240/160)(560 – 400) = 744$
$\sigma^2 = (240)^2.(1 – (0.6)^2) = (192)^2$

$$\Pr(400 < X < 840 | Y = 560) = \Pr\left(\frac{400-744}{192} < \frac{X-744}{192} < \frac{840-744}{192}\right) = \Phi(0.5000) - \Phi(-1.7917) = 0.6549$$

$$d)\Pr(400 < X < 840 | Y = 200) = ???$$

Esta é uma densidade condicional, que é também Normal, e seus parâmetros são:
$\mu = 600 + 0.60(240/160)(200 – 400) = 420$
$\sigma^2 = (240)^2.(1 – (0.6)^2) = (192)^2$

$$\Pr(400 < X < 840 | Y = 200) = \Pr\left(\frac{400-420}{192} < \frac{X-420}{192} < \frac{840-420}{192}\right) = \Phi(2.1875) - \Phi(-0.1042) = 0.5271$$

e) Qual a **distribuição de probabilidade** dos gastos de um consumidor no 2° shopping **sabendo que um consumidor semelhante gastou R$ 960 no primeiro shopping?**

Esta é uma densidade condicional, que é também Normal, e seus parâmetros são:
$\mu = 400 + 0.60(160/240)(960 – 600) = 544$

$\sigma^2 = (160)^2.(1 - (0.6)^2) = 16384 = (128)^2$
Logo, a densidade condicional de Y dado X = 960 é Normal $(544, (128)^2)$

f) Qual a **distribuição de probabilidade** dos gastos de um consumidor no 2º shopping **sabendo que um consumidor semelhante gastou R$ 480 no primeiro shopping?**

Esta é uma densidade condicional, que é também Normal, e seus parâmetros são:
$\mu = 400 + 0.60(160/240)(480 - 600) = 352$
$\sigma^2 = (160)^2.(1 - (0.6)^2) = 16384 = (128)^2$
Logo, a densidade condicional de Y dado X = 960 é Normal $(352, (128)^2)$

g) Qual a média condicional dos gastos de um consumidor no 2º shopping como função de x, onde x é o valor gasto por um consumidor semelhante no 1º shopping?

$E(Y \mid X = x) = 400 + 0.60(160/240)(x - 600) = 160 + (0.40)x$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0,0000	50,00%		0,9800	83,65%		2,0125	97,79%
0,0100	50,40%		0,9882	83,85%		2,0200	97,83%
0,0200	50,80%		0,9900	83,89%		2,0300	97,88%
0,0300	51,20%		1,0000	84,13%		2,0400	97,93%
0,0400	51,60%		1,0100	84,38%		2,0412	97,94%
0,0500	51,99%		1,0167	84,54%		2,0500	97,98%
0,1000	53,98%		1,0250	84,73%		2,1000	98,21%
0,1042	54,15%		1,0300	84,85%		2,1875	98,56%
0,1500	55,96%		1,0500	85,31%		2,2000	98,61%
0,2000	57,93%		1,0553	85,44%		2,2361	98,73%
0,2236	58,85%		1,1000	86,43%		2,3000	98,93%
0,2500	59,87%		1,1475	87,44%		2,3263	99,00%
0,3000	61,79%		1,1500	87,49%		2,3333	99,02%
0,3015	61,85%		1,1553	87,60%		2,4000	99,18%
0,3333	63,06%		1,2000	88,49%		2,5000	99,38%
0,3475	63,59%		1,2060	88,61%		2,5500	99,46%
0,3492	63,65%		1,2200	88,88%		2,5628	99,48%
0,3500	63,68%		1,2500	89,44%		2,6000	99,53%
0,4000	65,54%		1,2700	89,79%		2,6500	99,60%
0,4167	66,16%		1,2816	90,00%		2,6667	99,62%
0,4307	66,67%		1,3000	90,32%		2,6833	99,64%
0,4500	67,36%		1,3333	90,88%		2,7000	99,65%
0,5000	69,15%		1,3750	91,54%		2,7500	99,70%
0,5500	70,88%		1,4000	91,92%		2,8000	99,74%
0,5774	71,81%		1,4468	92,60%		2,9000	99,81%
0,6000	72,57%		1,4500	92,65%		2,9500	99,84%
0,6250	73,40%		1,5000	93,32%		3,0000	99,87%
0,6500	74,22%		1,5500	93,94%		3,1000	99,90%
0,6667	74,75%		1,6000	94,52%		3,1500	99,92%
0,7000	75,80%		1,6450	95,00%		3,2000	99,93%
0,7500	77,34%		1,6667	95,22%			
0,8000	78,81%		1,7000	95,54%			
0,8333	79,77%		1,7917	96,34%			
0,8400	79,95%		1,8000	96,41%			
0,8500	80,23%		1,8500	96,78%			
0,8666	80,69%		1,9000	97,13%			
0,8944	81,45%		1,9500	97,44%			
0,9000	81,59%		1,9600	97,50%			
0,9500	82,89%		1,9800	97,61%			
0,9600	83,15%		1,9900	97,67%			
0,9700	83,40%		2,0000	97,72%			
0,9750	83,52%		2,0100	97,78%			