IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2006.02
Teste 1 – 05/10/2006
GABARITO

ATENÇÃO – MOSTRE OS RESULTADOS NUMÉRICOS COM 4 CASAS DECIMAIS OU EM PORCENTAGEM COM 2 CASAS DECIMAIS.

PROBLEMA 1 (20 pontos)

Você quer montar um portfolio com dois ativos. Calcule o retorno médio e o risco (desvio padrão do retorno do portfolio) EM FUNÇÃO DE α (a proporção do ativo A no portfolio) sob as seguintes condições:
Ativo A: retorno médio = 2.5%, d.p. retorno = 6%
Ativo B: retorno médio = 1%, d.p. retorno = 2%

a) Suponha que a correlação entre os dois ativos é nula. Calcule o retorno médio e o risco (desvio padrão) do portfolio.
b) A correlação entre os dois ativos é -0.2. Calcule o retorno médio e o risco (desvio padrão) do portfolio.
c) Na situação do item b) encontre α de forma a obter o portfolio de menor variância possível.
d) Qual o risco (medido pelo desvio padrão) do portfolio do item c)?

Solução

O **retorno médio** do portfolio é, **em qualquer condição**:

E(P) = α.E(A) + (1-α).E(B) = 0.01(α) + 0.02(1-α)

A variância do retorno do portfolio é (em termos de α e ρ, o coeficiente de correlação):

$$VAR(P) = \alpha^2.VAR(A) + (1-\alpha)^2 VAR(B) + 2.\alpha.(1-\alpha)\rho\sqrt{VAR(A)}\sqrt{VAR(B)} =$$
$$= \alpha^2\left(\frac{6}{100}\right)^2 + (1-\alpha)^2\left(\frac{2}{100}\right)^2 + 2\rho.\alpha(1-\alpha)\left(\frac{6}{100}\right)\left(\frac{2}{100}\right) =$$
$$= \frac{36}{10^4}\alpha^2 + \frac{4}{10^4}(1-\alpha)^2 + \frac{24}{10^4}\rho.\alpha(1-\alpha)$$

O risco do portfolio é o seu desvio padrão, isto é:

$$dp(P) = \sqrt{\frac{36}{10^4}\alpha^2 + \frac{4}{10^4}(1-\alpha)^2 + \frac{24}{10^4}\rho.\alpha(1-\alpha)}$$

a) Neste caso, ρ = 0 e o risco do portfolio é:

$$dp(P) = \sqrt{\frac{36}{10^4}\alpha^2 + \frac{4}{10^4}(1-\alpha)^2}$$

b) Neste caso, ρ = -0.2 e o risco do portfolio é:

$$dp(P) = \sqrt{\frac{36}{10^4}\alpha^2 + \frac{4}{10^4}(1-\alpha)^2 + \frac{24}{10^4}\frac{(-2)}{10}.\alpha(1-\alpha)} = \sqrt{\frac{36}{10^4}\alpha^2 + \frac{4}{10^4}(1-\alpha)^2 - \frac{4.8}{10^4}.\alpha(1-\alpha)}$$

c) Aqui precisamos minimizar a variância de P sob as condições do item b).

$$VAR(P) = \frac{36}{10^4}\alpha^2 + \frac{4}{10^4}(1-\alpha)^2 - \frac{4.8}{10^4}\alpha(1-\alpha)$$

$$\frac{dVAR(P)}{d\alpha} = \frac{1}{10^4}\frac{d}{d\alpha}\left\{36\alpha^2 + 4(1-\alpha)^2 - 4.8\alpha(1-\alpha)\right\} = \frac{1}{10^4}\left\{72\alpha + 4(-2+2\alpha) - 4.8(1-2\alpha)\right\} = 0$$
$$\Leftrightarrow 72\alpha + 4(-2+2\alpha) - 4.8(1-2\alpha) = 0$$
$$\Leftrightarrow 85.6\alpha = 12.8 \Leftrightarrow \alpha = \frac{12.8}{85.6} = 0.1495$$

d) O desvio padrão do portfolio encontrado no item c) é:

$$dp(P) = \sqrt{\frac{36}{10^4}(0.1495)^2 + \frac{4}{10^4}(1-0.1495)^2 - \frac{4.8}{10^4}.0.1495(1-0.1495)} = 0.01757 = 1.76\%$$

PROBLEMA 2 (20 pontos)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid com densidade Exponencial com média $1/\lambda$. Seja:

$T = 2.\lambda.\sum_{i=1}^{n} X_i$. Mostre que T tem densidade Qui-quadrado com 2n graus de liberdade.

Dica: a solução é simples, não é necessário fazer contas muito complicadas. As densidades Qui-quadrado e Exponencial são apenas casos particulares da Gama. Como?

Solução

A função geradora de momentos de T é:

$$M_T(t) = E\left(e^{tT}\right) = E\left(e^{t2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = E\left(e^{t2\lambda X_1} e^{t2\lambda X_2} \ldots e^{t2\lambda X_n}\right)$$

Pela independência dos X_i´s, o valor esperado do produto indicado acima pode ser escrito como o produto dos valores esperados individuais. Além disso, os X_i´s são identicamente distribuídos e então cada $E\{\exp(t2\lambda X_i)\}$ é igual.

Assim:

$$M_T(t) = E\left(e^{t2\lambda X_1}\right)^n$$

Mas,
$E\left(e^{t2\lambda X_1}\right)$ é a função geradora de momentos de X_1 avaliada em $2\lambda t$, ou seja, é igual a:

$$E\left(e^{t2\lambda X_1}\right) = M(2\lambda t) = \frac{\lambda}{\lambda - (2\lambda t)} = \frac{1}{1-2t}$$ que é a fgm de uma variável Exponencial.

Então:

$M_T(t) = E\left(e^{t2\lambda X_1}\right)^n = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^n$ que é a função geradora de momentos com densidade Qui-quadrado com 2n graus de liberdade.

PROBLEMA 3 (10 pontos)

Sejam Y_1 e Y_2 variáveis Normais independentes com médias 2 e -1 e variâncias iguais a 1. Sejam X_1 e X_2 definidos como : $X_1 = \exp(Y_1)$ e $X_2 = \exp(Y_2)$.

Defina uma nova variável W como:

$$W = \left(2X_1^{\,2}.X_2^{\,4}\right)$$

Calcule E(W)

Dica:

Se X tem densidade N(μ, σ^2) então sua função geradora de momentos é:

$$M(t) = \exp\left[\mu.t + \frac{\sigma^2.t^2}{2}\right]$$

Solução

$$W = \left(2X_1^{\,2}.X_2^{\,4}\right) = 2.e^{2Y}\ .e^{4Y_2}$$

A média de W é:

$$E(W) = E\left(2X_1^{\,2}.X_2^{\,4}\right) = 2.E(e^{2Y}\ .e^{4Y_2}) = 2.E(e^{2Y}\ )E(e^{4Y_2})$$

Pois Y_1 e Y_2 são independentes. Mas, os valores esperados acima são apenas as fgm de Y_1 e Y_2 avaliadas em 2 e 4, respectivamente. Também, Y_1 e Y_2 são Normais, com fgms dadas na “dica” acima. Então:

$$E(e^{2Y_1}) = (M_{Y_1}(2)) = \exp\left[2(2) + \frac{1^2.(2)^2}{2}\right] = \exp(4+2) = \exp(6)$$

$$E(e^{4Y_2}) = (M_{Y_2}(4)) = \exp\left[-1(4) + \frac{1^2.(4)^2}{2}\right] = \exp(-4+8) = \exp(4)$$

E(W) = 2.e^6. e^4 = 2.e^{10}

PROBLEMA 4 (20 pontos)

Suponha que X, a nota de uma pessoa num concurso público, é uma variável aleatória contínua com densidade f(x) = cx^3 onde 0 < x < 100.

a) Ache a constante c que faz de f(x) uma densidade.

b) Encontre a função de distribuição de X.

c) Qual a probabilidade de uma pessoa qualquer tirar mais de 50 na prova?

d) Encontre a nota média na prova.

e) Encontre um ponto m no intervalo (0,100) tal que Pr(X > m) = Pr(X ≤ m) = 50%. Este ponto é a *mediana* da distribuição.

Solução

a) $\int_0^{100} cx^3 dx = 1 \Leftrightarrow c\frac{x^4}{4}\Big|_0^{100} = \frac{c(10)^8}{4} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{4}{10^8}$

b) F(x) = 0 se x < 0, F(x) = 1 se x >1

$$F(x) = \int_0^x \frac{4}{10^8} t^3 dt = \frac{x}{10^8}^4 \quad \text{onde } 0 \le x \le 1$$

c) Pr(X > 50) = $\int_{50}^{100} \frac{4}{10^8} t^3 dt = \frac{1}{10^8}\left\{10^8 - 5^4 10^4\right\} = \frac{1}{10^8} = \frac{4(93750000)}{10^8} = 0.9375$

d) E(X) = $\int_0^{100} x \frac{4}{10^8} x^3 dx = \frac{4}{10^8}\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^{100} = \frac{4}{5}\left(\frac{10^{10}}{10^8}\right) = \frac{400}{5} = 80$

e) Pr(0 < X < m) = F(m) = 50%

E aproveitando o item b):

$$\frac{m^4}{10^8} = 0.5 \Leftrightarrow m^4 = 0.5(10)^8 \Leftrightarrow m = 84.0896$$

PROBLEMA 5 (30 pontos)

Uma empresa distribuidora de energia registra mensalmente o consumo de energia de seus clientes. Num determinado prédio, o consumo de cada residência no mês de JULHO foi uma variável Normal com média 300 KWh e desvio padrão 60 KWh.

No mesmo prédio em JANEIRO, o consumo de cada residência foi uma variável Normal com média 420 KWh e desvio padrão 90 KWh.

Os consumos nos dois meses têm correlação 0.8.

a) A empresa pretende implantar um programa de fidelidade e quer convidar os clientes residenciais com contas mais altas. Apenas os 5% que **mais consomem** em JULHO receberão o cartão. Acima de qual consumo em julho uma residência será convidada para o programa de fidelidade?

b) Qual a probabilidade de uma residência consumir entre 210 e 360 KWh em JULHO?

c) Qual a probabilidade de uma residência consumir entre 210 e 360 KWh em JULHO sabendo que seu consumo em JANEIRO foi de 510 KWh?

d) Qual a probabilidade de uma residência consumir entre 210 e 360 KWh em JULHO sabendo que seu consumo em JANEIRO foi de 330 KWh?

e) Qual a distribuição de probabilidade do consumo de uma residência em JANEIRO sabendo que esta residência consumiu 330 KWh em JULHO?

f) Qual a média condicional do consumo em JANEIRO sabendo que em JULHO o consumo desta residência foi de x KWh?

Solução

X_1 = consumo em julho, é N(300, $(60)^2$)
X_2 = consumo em janeiro, é N(420, $(90)^2$)

a) O ponto z tal que a probabilidade de estar abaixo dele para uma variável N(0,1) é 95% é z = 1.645. Precisamos encontrar o ponto equivalente na distribuição do consumo de energia em julho. Este é o ponto x tal que:

$$\frac{x-300}{60} = 1.645 \Leftrightarrow x = 300 + 1.645(60) = 398.7 \text{ kWh}$$

b) Pr(210 < X_1 < 360) = $\Pr\left(\frac{210-300}{60} < \frac{X_1-300}{60} < \frac{360-300}{60}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1.5)$

c) Pr(210 < X_1 < 360 | X_2 = 510) = ?

A densidade condicional é Normal com média:

$$\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2) = 300 + 0.8\left(\frac{60}{90}\right)(510-420) = 348$$

E variância:

$$\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)=(60)^2\left(1-(0.8)^2\right)=3600(0.36)=1296=(36)^2$$

A probabilidade desejada é então:

Pr(210 < X_1 < 360 | X_2 = 510) = $\Pr\left(\frac{210-348}{36}<\frac{X_1-348}{36}<\frac{360-348}{36}\right)=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-\Phi(-3.8333)$

d) Pr(210 < X_1 < 360 | X_2 = 330) = ?

A densidade condicional é Normal com média:

$$\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(x_2-\mu_2\right)=300+0.8\left(\frac{60}{90}\right)(330-420)=252$$

e variância igual à do item anterior. Então:

Pr(210 < X_1 < 360 | X_2 = 330) = $\Pr\left(\frac{210-252}{36}<\frac{X_1-252}{36}<\frac{360-252}{36}\right)=\Phi(3)-\Phi(-1.1667)$

e) Qual a distribuição de probabilidade do consumo de uma residência em JANEIRO sabendo que esta residência consumiu 330 KWh em JULHO?

É uma distribuição Normal com média:

$$\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(x_1-\mu_1\right)=420+0.8\left(\frac{90}{60}\right)(330-300)=456$$

E variância: $\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)=(90)^2\left(1-(0.8)^2\right)=2916=(54)^2$

f) A média condicional será:

$$420+0.8\left(\frac{90}{60}\right)(x-300)=420+1.2(x-300)=60+1.2x$$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0,0000	50,00%		0,9800	83,65%		2,0100	97,78%
0,0100	50,40%		0,9882	83,85%		2,0125	97,79%
0,0200	50,80%		0,9900	83,89%		2,0200	97,83%
0,0300	51,20%		1,0000	84,13%		2,0300	97,88%
0,0400	51,60%		1,0100	84,38%		2,0400	97,93%
0,0500	51,99%		1,0167	84,54%		2,0412	97,94%
0,1000	53,98%		1,0250	84,73%		2,0500	97,98%
0,1042	54,15%		1,0300	84,85%		2,1000	98,21%
0,1500	55,96%		1,0500	85,31%		2,1875	98,56%
0,2000	57,93%		1,0553	85,44%		2,2000	98,61%
0,2236	58,85%		1,1000	86,43%		2,2361	98,73%
0,2500	59,87%		1,1475	87,44%		2,3000	98,93%
0,3000	61,79%		1,1500	87,49%		2,3263	99,00%
0,3015	61,85%		1,1553	87,60%		2,3333	99,02%
0,3333	63,06%		1,1667	87,83%		2,4000	99,18%
0,3475	63,59%		1,2000	88,49%		2,5000	99,38%
0,3492	63,65%		1,2200	88,88%		2,5500	99,46%
0,3500	63,68%		1,2500	89,44%		2,5628	99,48%
0,4000	65,54%		1,2700	89,79%		2,6000	99,53%
0,4167	66,16%		1,2816	90,00%		2,6500	99,60%
0,4307	66,67%		1,3000	90,32%		2,6667	99,62%
0,4500	67,36%		1,3333	90,88%		2,6833	99,64%
0,5000	69,15%		1,3750	91,54%		2,7000	99,65%
0,5500	70,88%		1,4000	91,92%		2,7500	99,70%
0,5774	71,81%		1,4468	92,60%		2,8000	99,74%
0,6000	72,57%		1,4500	92,65%		2,9000	99,81%
0,6250	73,40%		1,5000	93,32%		2,9500	99,84%
0,6500	74,22%		1,5500	93,94%		3,0000	99,87%
0,6667	74,75%		1,6000	94,52%		3,1000	99,90%
0,7000	75,80%		1,6450	95,00%		3,1500	99,92%
0,7500	77,34%		1,6667	95,22%		3,2000	99,93%
0,8000	78,81%		1,7000	95,54%		3,8333	99,99%
0,8333	79,77%		1,7917	96,34%			
0,8400	79,95%		1,8000	96,41%			
0,8500	80,23%		1,8500	96,78%			
0,8666	80,69%		1,9000	97,13%			
0,9000	81,59%		1,9500	97,44%			
0,9500	82,89%		1,9600	97,50%			
0,9600	83,15%		1,9800	97,61%			
0,9700	83,40%		1,9900	97,67%			
0,9750	83,52%		2,0000	97,72%			