IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2006.02
Teste 3 – 07/12/2006
GABARITO

ESCOLHA 4 DAS 6 QUESTÕES A SEGUIR, INDICANDO-AS NO QUADRO ABAIXO. AS QUESTÕES <u>NÃO MARCADAS NÃO SERÃO CORRIGIDAS!</u>

Questão	1	2	3	4	5	6

PROBLEMA 1

As notas num certo exame padronizado têm média 450 e desvio padrão 50. Uma nota acima de 480 é considerada muito boa. Uma pessoa consegue entrar um MBA de prestígio se ela obtém acima de 480 neste exame.

Numa certa sala onde o exame foi aplicado, 25 pessoas fizeram o teste. A nota média destas pessoas foi 490. Isso é estranho? Você acha que deve haver algum tipo de investigação para tentar detector alguma fraude? Dica – use o Teorema Central do Limite.

SOLUÇÃO

Seja X a nota no teste. Pelo enunciado do problema, X tem média 450 e desvio padrão 50. Logo, a média amostral das notas das 25 pessoas daquela sala (supondo que as notas são iid) é uma variável com média 450 e variância $(50)^2/25$. Então, pelo teorema central do limite:

$$\frac{\overline{X}-450}{\sqrt{\frac{(50)^2}{25}}}=\frac{\overline{X}-450}{\frac{50}{5}}=\frac{\overline{X}-450}{10}$$ é aproximadamente N(0,1).

$$\Pr\left(\overline{X}>490\right)=\Pr\left(\frac{\overline{X}-450}{10}>\frac{490-450}{10}\right)=1-\Phi(4)=0$$ Logo, é absolutamente improvável que a nota média daquelas 25 pessoas tenha superado 490, um indício claro de fraude no teste, que deverá ser investigado.

PROBLEMA 2

Seja X uma variável aleatória lognormal(μ, σ^2).
Mostre que E(X) = exp($\mu + \sigma^2/2$)

Dica: Lembre-se da função geradora de momentos de uma variável Normal. Se Y é Normal(μ, σ^2) então sua fgm é: $M(t) = \exp(\mu.t + \sigma^2 t^2/2)$

Solução

Pode-se escrever X como exp(Y) onde Y é Normal(μ, σ^2). Então:

$$E(X)=E\left(e^Y\right)=M_Y(1)=\exp\left\{\mu(1)+\frac{\sigma^2(1)^2}{2}\right\}=\exp\left\{\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

PROBLEMA 3

Toma-se duas amostras de marcas de pneus para testar a sua durabilidade média (em milhares de km).Os resultados estão a seguir.

	Marca 1	Marca 2
Tamanho da amostra	15	13
Durabilidade média do pneu (em mil km)	50	45
Desvio padrão da durabilidade média (em mil km)	9	13

a) Encontre um intervalo de confiança 95% para mu1 – mu2 onde mu1 é a durabilidade média dos pneus da marca 1 e mu2 é a mesma coisa para a marca 2.

b) Com 95% de probabilidade existe a chance de mu1 e mu2 serem iguais? Por que?

c) Encontre um intervalo de confiança 95% para a razão das variâncias $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$. As variâncias das duas amostras podem ser iguais com este grau de confiança?

Solução

a) Seja: $$R = \sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{n+m-2}\right)}$$

O IC 100(1-α)% para mu1 – mu2 (supondo que as variâncias das duas amostras são iguais) é:

$$\left((\overline{X}-\overline{Y})-bR;\ (\overline{X}-\overline{Y})+bR\right)$$

Onde b é obtido da distribuição com m + n -2 graus de liberdade tal que Pr(T < b) = 1 – α/2.

Neste caso, a distribuição apropriada é uma t com 26 graus de liberdade e b é tal que Pr(T < b) = 97.5%, e então, da tabela: b = 2.056.

$$R = \sqrt{\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{13}\right)\left(\frac{14(9)^2+12(13)^2}{26}\right)} = \sqrt{17.4627} = 4.1788$$

b.R = 8.5917

$$\left((\overline{X}-\overline{Y})-bR,(\overline{X}-\overline{Y})-bR\right) = (50-45-8.5917, 50-45+8.5917) = (-3.5917,+13.5917)$$

b) **SIM,** POIS O INTERVALO DE CONFIANÇA **INCLUI ZERO**.

c) Sabemos que:

$\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{m-1}$ e $\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n-1}$ são independentes, e assim a razão destas variáveis (divididas por seus graus de liberdade) tem distribuição F(m-1, n-1).

$$F = \frac{\dfrac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(m-1)}{\dfrac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n-1)} = \frac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}.\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

Logo, deve-se achar <u>a</u> e <u>b</u> da densidade F(m-1, n-1) tais que Pr(a < F < b) = 100(1-α) e Pr(F < a) = α/2 = Pr(F > b).

Neste caso m = 15 e n = 13, e então m – 1 = 14 e n -1 = 12.

A variável F tem densidade F(14, 12). O ponto b é tal que Pr(F > b) = 2.5% , ou seja, Pr(F < b) = 97.5%, e então, **b = 3.21** (diretamente da tabela).

O ponto a é encontrado indiretamente. Sabe-se que a variável W = 1/F tem também densidade F, mas com os graus de liberdade invertidos. Então: Pr(F < a) = Pr (1/F > 1/a) = Pr(W > 1/a) = 2.5% . Logo, Pr(W < 1/a) = 97.5% onde W tem distribuição F(12, 14). Assim, diretamente da tabela, 1/a = 3.05 e então **a = 1/(3.05) = 0.3279.**

$$\Pr\left(0.3279 < \frac{(9)^2\sigma_2^2}{(13)^2\sigma_1^2} < 3.21\right) = 0.95$$

E então o IC é:

$$\left(0.3279\left(\frac{13}{9}\right)^2, 3.21\left(\frac{13}{9}\right)^2\right) = (0.6841, 6.6974)$$

Note que o intervalo inclui 1, e portanto as variâncias das duas amostras podem ser iguais.

PROBLEMA 4

Uma linha de produção produz pacotes de café cujo peso nominal é 1 kg. Toma-se uma amostra de 25 pacotes e observa-se que o peso médio na amostra é 985g e o desvio padrão dos pesos é 60g. Encontre um intervalo de confiança 95% para a variância dos pesos dos pacotes supondo que os pesos têm distribuição Normal.

Solução

O IC tem a forma:

$\left(\frac{(n-1)S^2}{b}, \frac{(n-1)S^2}{a} \right)$ onde a e b são obtidos da distribuição Qui-quadrado com n-1 graus de liberdade tais que: Pr(a < X < b) = 100(1-α) e Pr(X < a) = α/2 = Pr(X > b) onde X é a variável Qui-quadrado.

Neste caso, o IC é 95%, e a densidade e Qui-quadrado com 24 graus de liberdade. Da tabela temos:
b = 39.364 e a = 12.401.

O IC é:

$$\left(\frac{24(60)^2}{39.364}, \frac{24(60)^2}{12.401} \right) = (2194.90, 6967.18)$$

PROBLEMA 5

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma densidade Uniforme(0,θ) onde θ é desconhecido.
a) Mostre que o MLE (estimador de máxima verossimilhança) de θ é:
$X_{(n)} = \text{máx}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
b) Encontre um estimador por método de momentos de θ.
c) O MLE de θ é não tendencioso?
d) O MLE de θ é consistente?
e) Coleta-se uma amostra de tamanho 10 da Uniforme(0,θ). Os valores observados são:
0,53 1,38 2,19 3,67 3,54
3,93 0,06 1,66 3,54 0,65
Compare o MLE e o estimador por método dos momentos de θ baseados nesta amostra.

Dica:
A função de distribuição de $X_{(n)}$ é: $\Pr(X_{(n)} \le x) = \Pr(\text{máx}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le x) =$
$= \Pr(X_1 \le x, X_2 \le x, \ldots, X_n \le x)$

Solução

A densidade de cada X_i é 1/θ desde que X_i esteja no intervalo (0, θ).
Logo, a verossimilhança é:

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \quad \text{se } 0 < \text{todo } X_i < \theta \Leftrightarrow L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \text{ se } 0 < X_{(1)} = \min \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)} = \max < \theta$$

Então, para que a verossimilhança seja não nula, é necessário que $\theta > X_{(n)} = \text{máx}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e portanto o MLE é: $\hat{\theta} = X_{(n)}$ pois a verossimilhança é decrescente como função de θ.

b) Um estimador por método de momentos de θ é encontrado igualando-se a média amostral à média da distribuição, ou seja:

$\overline{X} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \tilde{\theta} = 2\overline{X}$ é o estimador por método de momentos de θ.

c) A média do MLE é encontrada a partir de sua densidade. Usando a dica:

$\Pr(X_{(n)} \leq x) = \Pr(X_1 \leq x, X_2 \leq x, ..., X_n \leq x) = \{\Pr(X_1 \leq x)\}^n$ pois os X_i são iid.

Usando agora o fato dos X_i serem Uniforme(0, θ) temos:

$$\Pr(X_1 \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} du = \frac{x}{\theta} \quad \text{se} \quad 0 < x < \theta$$

$$\Pr(X_{(n)} \leq x) = \{\Pr(X_1 \leq x)\}^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

e a densidade de $X_{(n)}$ (o MLE) é obtida derivando-se esta função de distribuição.

$$g(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} \quad 0 < x < \theta$$

A média de $X_{(n)}$ é encontrada a partir desta densidade:

$E(X_{(n)}) = \int_0^\theta x \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n}\left(\frac{\theta^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\theta$ e portanto o MLE é um estimador ***tendencioso***.

O 2º. Momento de $X_{(n)}$ é obtido de maneira análoga.

$$E(X_{(n)}{}^2) = \int_0^\theta x^2 \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n}\left(\frac{\theta^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

A variância de $X_{(n)}$ é então:

$$\frac{n}{n+2}\theta^2 - \left\{\frac{n}{n+1}\theta\right\}^2 = \theta^2\left\{\frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\right\} = \theta^2\left\{\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\right\}$$

A tendência de $X_{(n)}$ é:

$$BIAS(X_{(n)}) = E(X_{(n)}) - \theta = \frac{n}{n+1}\theta - \theta = \frac{-1}{n+1}\theta$$

d) O erro quadrático médio de $X_{(n)}$ é:

$$EQM(X_{(n)}) = VAR\left(X_{(n)}\right) + \left\{BIAS\left(X_{(n)}\right)\right\}^2 = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2}$$

O limite do erro quadrático médio quando n tende a infinito é zero, e portanto $X_{(n)}$ é um estimador ***consistente*** de θ.

e) Neste caso:

O MLE é $X_{(n)} = 3.93$
E o estimador por método de momentos é $2\overline{X} = 2(2.115) = 4.23$

PROBLEMA 6

Uma empresa administra dois shopping-centers localizados em diferentes áreas da cidade.
No ***primeiro shopping*** verificou-se que um consumidor gasta em média R$ 600,00 em compras de Natal. A dispersão entre os valores gastos, medida pelo desvio padrão, é R$ 240,00.

No ***segundo shopping***, o gasto médio por consumidor em compras de Natal é R$ 400,00 e o desvio padrão dos gastos é R$ 160,00.

Além disso, pode-se encarar os valores gastos em compras de Natal pelos consumidores nos dois shoppings como variáveis Normais correlacionadas, com coeficiente de correlação + 0.60.

a) A empresa controladora pretende oferecer um cartão VIP aos clientes que consomem muito no ***primeiro shopping***. Apenas os 1% que **mais consomem** no período de Natal receberão o cartão. Acima de qual volume de compras um consumidor se candidata ao cartão VIP?

b) Numa loja no ***segundo shopping*** estão 16 clientes. Qual a probabilidade do **gasto médio** em compras de Natal destas 16 pessoas ultrapassar R$ 460,00?

c) Numa loja no ***segundo shopping*** estão 16 clientes. Qual a probabilidade da pessoa que **menos gastou** ter gasto mais que R$ 440,00?

d) Qual a probabilidade de um consumidor gastar entre R$ 400 e R$ 840 em compras de Natal ***no primeiro shopping?***

e) Qual a probabilidade de um consumidor gastar entre R$ 400 e R$ 840 em compras de Natal ***no primeiro shopping sabendo que um consumidor com perfil semelhante gastou R$ 560 no segundo shopping?***

f) Qual a probabilidade de um consumidor gastar entre R$ 400 e R$ 840 em compras de Natal ***no primeiro shopping sabendo que um consumidor com perfil semelhante gastou R$ 200 no segundo shopping?***

Solução

Gasto no 1º. shopping: X ~ $N(600, (240)^2)$
Gasto no 2º. shopping: Y ~ $N(400, (160)^2)$
Correlação: $\rho = 0.60$

a) VIPs = 1% que mais consomem no 1º. shopping
Em termos de uma variável Normal padrão, é o ponto tal que $\Phi(z) = 0.99$, ou seja, é z = 2.3263 (da tabela da Normal).

Logo:

$$\frac{X-600}{240} = 2.3263 \Leftrightarrow X = 600 + 240(2.3263) \Leftrightarrow X = R\$1158.31$$

Um cliente será considerado VIP no 1º. shopping se suas compras de Natal excederem R$ 1158.31.

b) Toma-se uma amostra de 16 pessoas no 2º. shopping. A distribuição do gasto médio destas pessoas é:

$$\bar{Y} \sim N\left(400, \frac{(160)^2}{16}\right)$$

Queremos encontrar:

$$\Pr(\bar{Y} > 460) = \Pr\left(\frac{\bar{Y}-400}{160/\sqrt{16}} > \frac{460-400}{160/4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{460-400}{40}\right) = 1 - \Phi(+1.5) = 1 - 0.9331 = 6.7\%$$

c) Seja U = min(X_1, X_2, ..., X_{16}) a variável que representa o menor gasto dentro da amostra. Queremos calcular Pr(U > 440).

Mas:

$\Pr(U > 440) = \Pr(X_1 > 440, X_2 > 440, \ldots, X_{16} > 440) = (\Pr(X_1 > 440))^{16}$ pois os X_i são independentes e identicamente distribuídos.

Também:

$$\Pr(X_1 > 440) = \Pr\left(\frac{X_1 - 400}{160} > \frac{440-400}{160}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{40}{160}\right) = 1 - \Phi(0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013$$

Assim:

$$\Pr(U > 440) = (0.4013)^{16} \cong 4.52 * 10^{-7}$$

$$d)\ \Pr(400 < X < 840) = \Pr\left(\frac{400-600}{240} < \frac{X-600}{240} < \frac{840-600}{240}\right) = \Pr(-0.8333 < Z < 1) = 0.8413 - 0.2023 = 0.639$$

$$e)\ \Pr(400 < X < 840 | Y = 560) = ???$$

Esta é uma densidade condicional, que é também Normal, e seus parâmetros são:
μ = 600 + 0.60(240/160)(560 – 400) = 744
$\sigma^2 = (240)^2.(1 - (0.6)^2) = (192)^2$

$$\Pr(400 < X < 840 | Y = 560) = \Pr\left(\frac{400-744}{192} < \frac{X-744}{192} < \frac{840-744}{192}\right) = \Phi(0.5000) - \Phi(-1.7917) = 0.6549$$

$$f)\ \Pr(400 < X < 840 | Y = 200) = ???$$

Esta é uma densidade condicional, que é também Normal, e seus parâmetros são:
μ = 600 + 0.60(240/160)(200 – 400) = 420
$\sigma^2 = (240)^2.(1 - (0.6)^2) = (192)^2$

$$\Pr(400 < X < 840 | Y = 200) = \Pr\left(\frac{400-420}{192} < \frac{X-420}{192} < \frac{840-420}{192}\right) = \Phi(2.1875) - \Phi(-0.1042) = 0.5271$$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0.0000	50.00%		0.9800	83.65%		2.0125	97.79%
0.0200	50.80%		0.9900	83.89%		2.0200	97.83%
0.0300	51.20%		1.0000	84.13%		2.0300	97.88%
0.0500	51.99%		1.0100	84.38%		2.0400	97.93%
0.1000	53.98%		1.0167	84.54%		2.0412	97.94%
0.1042	54.15%		1.0250	84.73%		2.0500	97.98%
0.1500	55.96%		1.0500	85.31%		2.1000	98.21%
0.2000	57.93%		1.0553	85.44%		2.1875	98.56%
0.2236	58.85%		1.1000	86.43%		2.2000	98.61%
0.2500	59.87%		1.1180	86.82%		2.2361	98.73%
0.3000	61.79%		1.1475	87.44%		2.3000	98.93%
0.3015	61.85%		1.1500	87.49%		2.3263	99.00%
0.3333	63.06%		1.1553	87.60%		2.3333	99.02%
0.3475	63.59%		1.2000	88.49%		2.4000	99.18%
0.3492	63.65%		1.2060	88.61%		2.5000	99.38%
0.3500	63.68%		1.2200	88.88%		2.5500	99.46%
0.4000	65.54%		1.2500	89.44%		2.5628	99.48%
0.4167	66.16%		1.2700	89.79%		2.6000	99.53%
0.4307	66.67%		1.2816	90.00%		2.6500	99.60%
0.4500	67.36%		1.3000	90.32%		2.6667	99.62%
0.5000	69.15%		1.3333	90.88%		2.6833	99.64%
0.5500	70.88%		1.3750	91.54%		2.7000	99.65%
0.5774	71.81%		1.4000	91.92%		2.7500	99.70%
0.6000	72.57%		1.4468	92.60%		2.8000	99.74%
0.6250	73.40%		1.4500	92.65%		2.9000	99.81%
0.6500	74.22%		1.5000	93.32%		2.9500	99.84%
0.6667	74.75%		1.5500	93.94%		3.0000	99.87%
0.6708	74.88%		1.5811	94.31%		3.1000	99.90%
0.7000	75.80%		1.6000	94.52%		3.1500	99.92%
0.7500	77.34%		1.6450	95.00%		3.2000	99.93%
0.8000	78.81%		1.6667	95.22%			
0.8333	79.77%		1.7000	95.54%			
0.8400	79.95%		1.7917	96.34%			
0.8500	80.23%		1.8000	96.41%			
0.8666	80.69%		1.8500	96.78%			
0.8944	81.45%		1.9000	97.13%			
0.9000	81.59%		1.9500	97.44%			
0.9167	82.03%		1.9600	97.50%			
0.9500	82.89%		1.9800	97.61%			
0.9600	83.15%		1.9900	97.67%			
0.9700	83.40%		2.0000	97.72%			
0.9750	83.52%		2.0100	97.78%			

Pontos Percentuais

Variável t com p graus de liberdade

Exemplo

Se T tem densidade t com 12 graus de liberdade, Pr(T <= 1.782) = 95%

Graus de liberdade	60%	75%	80%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	0.325	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.697	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.695	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.684	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.256	0.682	0.853	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744
32	0.255	0.682	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.682	0.853	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.682	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.682	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.681	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
45	0.255	0.680	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
50	0.255	0.679	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	0.254	0.679	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660

Tabela da Função de Distribuição da densidade Qui-quadrado

Cada célula desta tabela contém Pr(X <= x) com as probabilidades especificadas em cada coluna.

Exemplo
Se X tem densidade Qui-quadrado com 12 graus de liberdade, Pr(X <= 8.438)= 0.25

probabilidade →	0.5%	1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	25.0%	50.0%	75.0%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%
graus de liberdade ↓													
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.341	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.340	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	12.340	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165	13.339	17.117	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.037	14.339	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912	15.338	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.792	16.338	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	13.675	17.338	21.605	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	14.562	18.338	22.718	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	15.452	19.337	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	16.344	20.337	24.935	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	17.240	21.337	26.039	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	18.137	22.337	27.141	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	19.037	23.337	28.241	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	19.939	24.337	29.339	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	20.843	25.336	30.435	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	21.749	26.336	31.528	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	22.657	27.336	32.620	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	23.567	28.336	33.711	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	24.478	29.336	34.800	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	25.390	30.336	35.887	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	26.304	31.336	36.973	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	27.219	32.336	38.058	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	28.136	33.336	39.141	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	29.054	34.336	40.223	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	29.973	35.336	41.304	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	30.893	36.336	42.383	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	31.815	37.335	43.462	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	32.737	38.335	44.539	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660	39.335	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766

Distribuição F com v1 graus de liberdade no numerador e v2 graus no denominador

Tabela com percentis 97.5% da distribuição F

Exemplo

Se X tem distribuição F com 4 graus no numerador e 3 graus no denominador, Pr(X < = 9.12) = 97.5%

v1 ⇨ / v2 ⇩	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	24	25	30
1	647.79	799.50	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63	973.03	976.71	979.84	982.53	984.87	993.10	997.25	998.08	1001.41
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.41	39.42	39.43	39.43	39.45	39.46	39.46	39.46
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.37	14.34	14.30	14.28	14.25	14.17	14.12	14.12	14.08
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	8.71	8.68	8.66	8.56	8.51	8.50	8.46
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52	6.49	6.46	6.43	6.33	6.28	6.27	6.23
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	5.33	5.30	5.27	5.17	5.12	5.11	5.07
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	4.63	4.60	4.57	4.47	4.41	4.40	4.36
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	4.16	4.13	4.10	4.00	3.95	3.94	3.89
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	3.83	3.80	3.77	3.67	3.61	3.60	3.56
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	3.58	3.55	3.52	3.42	3.37	3.35	3.31
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	3.39	3.36	3.33	3.23	3.17	3.16	3.12
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	3.24	3.21	3.18	3.07	3.02	3.01	2.96
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	2.95	2.89	2.88	2.84
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05	3.01	2.98	2.95	2.84	2.79	2.78	2.73
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	2.92	2.89	2.86	2.76	2.70	2.69	2.64
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89	2.85	2.82	2.79	2.68	2.63	2.61	2.57
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82	2.79	2.75	2.72	2.62	2.56	2.55	2.50
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73	2.70	2.67	2.56	2.50	2.49	2.44
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72	2.68	2.65	2.62	2.51	2.45	2.44	2.39
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	2.64	2.60	2.57	2.46	2.41	2.40	2.35
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.68	2.64	2.60	2.56	2.53	2.42	2.37	2.36	2.31
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53	2.50	2.39	2.33	2.32	2.27
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.62	2.57	2.53	2.50	2.47	2.36	2.30	2.29	2.24
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.50	2.47	2.44	2.33	2.27	2.26	2.21
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51	2.48	2.44	2.41	2.30	2.24	2.23	2.18
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42	2.39	2.28	2.22	2.21	2.16
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.51	2.47	2.43	2.39	2.36	2.25	2.19	2.18	2.13
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.37	2.34	2.23	2.17	2.16	2.11
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.48	2.43	2.39	2.36	2.32	2.21	2.15	2.14	2.09
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.20	2.14	2.12	2.07
35	5.48	4.11	3.52	3.18	2.96	2.80	2.68	2.58	2.50	2.44	2.39	2.34	2.30	2.27	2.23	2.12	2.06	2.05	2.00
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.33	2.29	2.25	2.21	2.18	2.07	2.01	1.99	1.94