IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2007.01
Teste 1 – 29/03/2007
GABARITO

ATENÇÃO – MOSTRE OS RESULTADOS NUMÉRICOS COM 4 CASAS DECIMAIS OU EM PORCENTAGEM COM 2 CASAS DECIMAIS.

PROBLEMA 1 (20 pontos)

O salário dos funcionários numa empresa pode ser modelado por uma variável contínua X com a seguinte densidade:

$f(x) = \frac{c}{x^2}$ se $1000 \le X \le 8000$

a) Ache a constante c que faz de f(x) uma densidade.
b) Qual o salário médio?
c) Ache o ponto m entre 1000 e 8000 tal que $Pr(X \le m) = 0.50$. Este ponto é a mediana de X, ou seja, o salário mediano dos funcionários desta empresa?
d) Qual a função de distribuição?

Solução

$$\int_{1000}^{8000} \frac{c}{x^2}dx = \frac{-c}{x}\Big|_{1000}^{8000} = -c\left(\frac{1}{8000} - \frac{1}{1000}\right) = -\frac{c}{8000}(1-8) = +\frac{7}{8000}c = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{8000}{7} = 1142.857$$

b) O salário médio é:

$$\int_{1000}^{8000} cx\frac{1}{x^2}dx = c\int_{1000}^{8000}\frac{dx}{x} = c.\ln(x)\Big|_{1000}^{8000} = c\{\ln(8000) - \ln(1000)\} = c.\ln(8)$$

$$= \frac{8000}{7}\ln(8) = 2376.50$$

c) O salário mediano é tal que:

$$c\int_{1000}^{m}\frac{dx}{x^2} = c.\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1000}^{m} = \frac{8000}{7}\left[\frac{-1}{m} + \frac{1}{1000}\right] = \frac{8000}{7}\left[\frac{m-1000}{1000m}\right] = 0.5$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{7m}[m-1000] = 0.5 \Leftrightarrow 8m - 8000 = 3.5m \Leftrightarrow 4.5m = 8000$$

$$m = 1777.78$$

PROBLEMA 2 (10 pontos)

O retorno mensal de certo investimento de risco pode ser modelado pela variável aleatória R com função de probabilidade dada a seguir:

r	-5 %	0 %	5 %	10 %	15 %
Pr(R = r)	0.35	0.15	0.20	0.20	0.10

a) Calcule o **retorno esperado** (em %) do investimento.

b) Considere agora a variável aleatória X , onde X = 0 se houve retorno negativo ou zero, e X =1 ("sucesso") se houve retorno positivo. Suponha que você aplica o seu dinheiro por 12 meses consecutivos, e que as aplicações em meses subsequentes são independentes e com a mesma probabilidade de "sucesso". Qual a probabilidade de obter retorno positivo em 9 ou mais meses?

Solução

a) O retorno médio mensal, em percentual, é:

$E(R) = (-5)(0.35) + 0(0.15) + (5)(0.20) + (10)(0.20) + 15(0.10) = 2.75\%$

b) X é uma variável Binomial com parâmetros n = 12 e p = 0.50, pois a probabilidade de um retorno positivo num dado mês é 0.5 da tabela acima.

Queremos encontrar $\Pr(X \geq 9) = \Pr(X = 9) + ... + \Pr(X = 12)$.

x	**Pr(X = x)**
9	5.37%
10	1.61%
11	0.29%
12	0.02%
soma	***7.30%***

Logo, $\Pr(X \geq 9) = 7.30\%$.

PROBLEMA 3 (25 pontos)

O Detran de um certo estado estima que **70%** dos carros estão com a **documentação irregular**. A polícia decide fazer uma blitz numa estrada, até encontrar um carro com a documentação **perfeita** (sem irregularidades). Qual a probabilidade da polícia precisar checar os documentos de mais de 5 carros até encontrar o primeiro carro sem problemas na documentação?

Suponha agora que você trabalha na polícia e recebeu a ordem de ter que “mostrar serviço”, apreendendo 10 carros que estão com a documentação irregular. Qual a probabilidade de você ter que vistoriar 20 carros?

Cada carro apreendido pela polícia é levado para o depósito, onde paga uma diária de R$100. Também, suponha que a regularização de um automóvel custe ao dono, em média, outros R$700, e portanto o Estado recebe R$ 800 por cada veículo apreendido. Qual a receita média esperada pelo governo nesta "blitz" que só se encerra quando o 10º. carro em situação irregular é apreendido?

Solução

p = probabilidade de um carro com a documentação irregular = 0.7

X = número de carros vistoriados até encontrar um com a documentação OK, é uma variável geométrica com probabilidade 1 – p = 0.3

Pr(X > 5) = Pr(X = 6) + Pr(X =7) + Pr(X=8) + ... = 1 – Pr(X ≤ 5) =

$$=1-\sum_{x=1}^{5}(0.7)^{x-1}(0.3)=1-0.3\sum_{x=1}^{5}(0.7)^{x-1}=1-\left(\frac{0.3}{0.7}\right)\sum_{x=1}^{5}(0.7)^{x}=$$

$$=1-\left(\frac{0.3}{0.7}\right)\left\{\frac{0.7-(0.7)^6}{1-0.7}\right\}=1-\left(\frac{0.3}{0.7}\right)\left\{\frac{(0.7)\left(1-(0.7)^5\right)}{0.3}\right\}=1-\left(1-(0.7)^5\right)=$$

$$=(0.7)^5=0.1681$$

Agora o problema só se encerra ao encontrarmos o décimo carro com a documentação irregular. Seja Y o número de carros vistoriados até que o 10º. carro irregular seja encontrado. Então Y é uma variável Binomial Negativa com r = 10 e p = 0.7 (a probabilidade de encontrar um carro irregular). Queremos achar a prob. de Y ser 20.

$$\Pr(Y=y)=\binom{y-1}{9}(0.3)^{y-10}(0.7)^{10}\qquad y=10,11,12,13,....$$

Se Y=20 temos:

$$\Pr(Y=20)=\binom{19}{9}(0.3)^{10}(0.7)^{10}=\frac{19!}{9!10!}(0.21)^{10}=0.0154$$

Note que a média de Y é r/p = 10/0.7 = 14.2857

A receita obtida pelo governo em decorrência da blitz é fixa, 800*10 = R$ 8000, não depende da média de Y, pois a blitz vai ser encerrada quando 10 carros forem apreendidos, não interessa o que acontecer.

PROBLEMA 4 (20 pontos)

Um terrorista quer envenenar as pessoas numa festa. Nela, são servidas 60 refeições individuais, das quais 6 estão envenenadas. Qual a probabilidade de, numa mesa de 8 convidados, pelo menos uma pessoa ser envenenada?

Solução

Seja X o número de pessoas envenenadas nesta mesa. Então:

$$\Pr\left(X = x\right) = \frac{\binom{6}{x}\binom{54}{8-x}}{\binom{60}{8}}$$

Queremos encontrar a probabilidade de pelo menos uma pessoa envenenada, isto é, Pr(X=1) + Pr(X=2) +...+ Pr(X=8) = 1 – Pr(X = 0)

Mas,

$$\Pr\left(X = 0\right) = \frac{\binom{6}{0}\binom{54}{8}}{\binom{60}{8}} = \frac{\binom{54}{8}}{\binom{60}{8}} = 0.4067$$

E a probabilidade desejada é: 1- 0.4067 = 0.5933

PROBLEMA 5 (25 pontos)

Seja X uma variável aleatória contínua com densidade:

$f(x) = k.x^2(1-x) \quad 0 < x < 1$

a) Ache k tal que f(x) seja uma densidade
b) Encontre a média de X
c) Encontre a variância e o desvio padrão de X

Solução

a) $\int_0^1 kx^2\left(1-x\right)dx = \int_0^1\left(kx^2 - kx^3\right)dx = \frac{k}{3} - \frac{k}{4} = \frac{k}{12} = 1 \Rightarrow k = 12$

b)
$$E(X) = \int_0^1 x\left\{12x^2\left(1-x\right)\right\}dx = 12\int_0^1\left\{x^3\left(1-x\right)\right\}dx = 12\int_0^1 (x^3 - x^4)dx =$$
$$= 12\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right\} = \frac{12}{20} = 0.6$$

c)
$$E(X^2) = 12\int_0^1 \left\{x^4\left(1-x\right)\right\} dx = 12\int_0^1 (x^4 - x^5)dx =$$
$$= 12\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right\} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0.4$$

VAR(X) = E(X^2) – μ^2 = 0.4 – $(0.6)^2$ = 0.40 – 0.36 = 0.04

d.p.(X) = $\sqrt{0.04} = 0.2$