IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2007.01
Teste 2 – 10/05/2007
GABARITO

ATENÇÃO – MOSTRE OS RESULTADOS NUMÉRICOS COM 4 CASAS DECIMAIS OU EM PORCENTAGEM COM 2 CASAS DECIMAIS.

PROBLEMA 1 (20 pontos)

Você quer montar um portfolio com dois ativos. Calcule o retorno médio e o risco (desvio padrão do retorno do portfolio) EM FUNÇÃO DE α (a proporção do ativo A no portfolio) sob as seguintes condições:
Ativo A: retorno médio = 3%, d.p. retorno = 8%
Ativo B: retorno médio = 2%, d.p. retorno = 6%

a) Suponha que a correlação entre os dois ativos é nula. Calcule o retorno médio e o risco (desvio padrão) do portfolio.
b) A correlação entre os dois ativos é -0.3. Calcule o retorno médio e o risco (desvio padrão) do portfolio.
c) Na situação do item b) encontre α de forma a obter o portfolio de menor variância possível.
d) Qual o risco (medido pelo desvio padrão) do portfolio do item c)?

Solução

O **retorno médio** do portfolio é, **em qualquer condição**:

E(P) = α.E(A) + (1-α).E(B) = 0.03(α) + 0.02(1-α)

A variância do retorno do portfolio é (em termos de α e ρ, o coeficiente de correlação):

$$VAR(P) = \alpha^2.VAR(A) + (1-\alpha)^2 VAR(B) + 2.\alpha.(1-\alpha)\rho\sqrt{VAR(A)}\sqrt{VAR(B)} =$$
$$= \alpha^2\left(\frac{8}{100}\right)^2 + (1-\alpha)^2\left(\frac{6}{100}\right)^2 + 2\rho.\alpha(1-\alpha)\left(\frac{8}{100}\right)\left(\frac{6}{100}\right) =$$
$$= \frac{64}{10^4}\alpha^2 + \frac{36}{10^4}(1-\alpha)^2 + \frac{96}{10^4}\rho.\alpha(1-\alpha)$$

O risco do portfolio é o seu desvio padrão, isto é:

$$dp(P) = \sqrt{\frac{64}{10^4}\alpha^2 + \frac{36}{10^4}(1-\alpha)^2 + \frac{96}{10^4}\rho.\alpha(1-\alpha)}$$

a) Neste caso, ρ = 0 e o risco do portfolio é:

$$dp(P)=\sqrt{\frac{64}{10^4}\alpha^2+\frac{36}{10^4}(1-\alpha)^2}=\frac{1}{100}\sqrt{64\alpha^2+36(1-\alpha)^2}=\frac{1}{100}\sqrt{64\alpha^2+36-72\alpha+36\alpha^2}=$$
$$=\frac{1}{100}\sqrt{100\alpha^2-72\alpha+36}$$

b) Neste caso, ρ = -0.3 e o risco do portfolio é:

$$dp(P)=\sqrt{\frac{64}{10^4}\alpha^2+\frac{36}{10^4}(1-\alpha)^2+\frac{96}{10^4}(-0.3).\alpha(1-\alpha)}=\frac{1}{100}\sqrt{64\alpha^2+36-72\alpha+36\alpha^2-28.8(\alpha-\alpha^2)}=$$
$$=\frac{1}{100}\sqrt{100\alpha^2-72\alpha+36-28.8(\alpha-\alpha^2)}=\frac{1}{100}\sqrt{128.8\alpha^2-100.8\alpha+36}$$

c) Aqui precisamos minimizar a variância de P sob as condições do item b).

$$VAR(P)=\frac{128.8}{10^4}\alpha^2-\frac{100.8}{10^4}\alpha+36$$

$$\frac{dVAR(P)}{d\alpha}=\frac{1}{10^4}\frac{d}{d\alpha}\{128.8\alpha^2-100.8\alpha+36)\}=\frac{1}{10^4}\{257.6\alpha-100.8\}=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{100.8}{257.6}=0.3913$$

d) O desvio padrão do portfolio encontrado no item c) é:

$$dp(P)=\frac{1}{100}\sqrt{128.8(0.3913)^2-100.8(0.3913)+36}=4.03\%$$

PROBLEMA 2 (20 pontos)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independentes com densidades Qui-quadrado com $k_1, k_2, \ldots, k_n$ graus de liberdade respectivamente. Seja:

$T=\sum_{i=1}^{n} X_i$. Mostre que T também tem densidade Qui-quadrado e indique quais os seus graus de liberdade.

Solução

Nota: Se X tem densidade Qui-Quadrado com n graus de liberdade, sua função geradora de momentos é:

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$$ onde t < ½.

A fgm de T é:

$$M_T(t) = E\left(e^{tT}\right) = E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = E\left(e^{t(X_1+X_2+...+X_n)}\right) = E\left(e^{tX_1}e^{tX_2}...e^{tX_n}\right)$$

E como os X_i ´s são independentes, este último termo se torna um produto dos respectivos valores esperados.

$M_T(t) = E\left(e^{tX_1}e^{tX_2}...e^{tX_n}\right) = E\left(e^{tX_1}\right)E\left(e^{tX_2}\right)...E\left(e^{tX_n}\right)$ e cada termo do lado direito é a função geradora de momentos de X_1, X_2, ..., X_n que são, por hipótese, todos Qui-quadrado. Então:

$M_T(t) = E\left(e^{tX_1}\right)E\left(e^{tX_2}\right)...E\left(e^{tX_n}\right) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{k_1}{2}}}\frac{1}{(1-2t)^{\frac{k_2}{2}}}...\frac{1}{(1-2t)^{\frac{k_n}{2}}} = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{k_1+k_2+...+k_n}{2}}}$ que é a fgm de uma variável Qui-quadrado com (k_1 + k_2 + ... + k_n) graus de liberdade.

PROBLEMA 3 (10 pontos)

Sejam Y_1 e Y_2 variáveis Normais independentes com médias 1 e -1 e variâncias 4 e 1 respectivamente. Sejam X_1 e X_2 definidos como : $X_1 = \exp(Y_1)$ e $X_2 = \exp(Y_2)$.

Defina uma nova variável W como:

$$W = \left(-X_1^{\ 2}.X_2^{\ 3}\right)$$

Calcule E(W)

Dica:

Se X tem densidade N(μ, σ^2) então sua função geradora de momentos é:

$$M(t) = \exp\left[\mu.t + \frac{\sigma^2.t^2}{2}\right]$$

Solução

$$W = \left(-X_1^{\ 2}.X_2^{\ 3}\right) = -e^{2Y_1}.e^{3Y_2}$$

A média de W é:

$$E(W) = E\left(-X_1^{\ 2}.X_2^{\ 3}\right) = -E\left(e^{2Y_1}.e^{3Y_2}\right) = -E(e^{2Y_1})E(e^{3Y_2})$$

Pois Y_1 e Y_2 são independentes. Mas, os valores esperados acima são apenas as fgm de Y_1 e Y_2 avaliadas em 2 e 3, respectivamente. Também, Y_1 e Y_2 são Normais, com fgms dadas na "dica" acima. Então:

$$E(e^{2Y_1}) = (M_{Y_1}(2)) = \exp\left[1(2) + \frac{4.(2)^2}{2}\right] = \exp(2+8) = \exp(10)$$

$$E(e^{3Y_2}) = (M_{Y_2}(3)) = \exp\left[-1(3) + \frac{1^2.(3)^2}{2}\right] = \exp\left(\frac{3}{2}\right)$$

$E(W) = -e^{10}\, e^{3/2} = -e^{23/2}$

PROBLEMA 4 (30 pontos)

O preço por litro da gasolina comum no Rio de Janeiro é uma variável aleatória Normal com média R$ 2.60 e desvio padrão R$ 0.15.

a) Qual a probabilidade da gasolina comum custar menos de R$ 2.50?
b) Quanto um posto deve cobrar pela gasolina para estar entre os 10% mais caros?
c) Quanto um posto deve cobrar pelo litro da gasolina para estar entre os 20% mais baratos?

Toma-se uma amostra de 9 postos de gasolina.

d) Qual a probabilidade do preço médio da gasolina na amostra ser menor que R$ 2.65?
e) Qual a probabilidade do posto mais caro cobrar mais de R$ 2.66 por litro?
f) Qual a probabilidade do posto mais barato cobrar menos de R$ 2.56 por litro?

Solução

Seja X o preço da gasolina. Então X é N(2.60, $(0.15)^2$) e daí a variável Z = (X-2.60)/(0.15) tem densidade N(0,1).

a) A probabilidade desejada é:

$$\Pr(X < 2.50) = \Pr\left(\frac{X - 2.60}{0.15} < \frac{2.50 - 2.60}{0.15}\right) = \Phi(-0.6667) = 1 - \Phi(+0.6667) =$$
$$= 1 - 0.7475 = 0.2525$$

b) Na escala da N(0,1), o ponto z tal que 1-Φ(z) = 10%, isto é, Φ(z) = 90%, é: **z = 1.2816**. Precisamos agora transformar este ponto para a escala dos preços da gasolina. Basta notar que Z = (X-2.60)/(0.15) ou, alternativamente, X = 2.60 + 0.15Z. Portanto, um posto estará entre os 10% mais caros se cobrar igual ou mais que:

2.60 + 0.15(1.2816) = R$ 2.7922 por um litro de gasolina.

c) Para estar entre os 20% mais baratos na escala da N(0,1), o ponto deve ser tal que seu valor tabelado seja igual a 20%. Mas, este ponto é um valor negativo, e a tabela só é fornecida para valores positivos de z. Pela simetria da N(0,1), $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ e portanto se $\Phi(-z) = 0.20$ então $1 - \Phi(z) = 0.20$ e precisamos achar o ponto na tabela tal que $\Phi(z) = 0.8$ e usarmos o seu negativo. Da tabela, este ponto é z = 0.8416 e então usaremos – z = -0.8416. Por argumentos análogos aos do item anterior, um posto estará entre os 20% mais baratos se a gasolina custar **igual ou abaixo de 2.60 – 0.8416(0.15) = R$ 2.4738**.

d) O preço médio da gasolina é uma variável Normal com média 2.60 e variância $(0.15)^2/9$.

$$\Pr\left(\bar{X} < 2.65\right) = \Pr\left(\frac{\bar{X} - 2.60}{\sqrt{\frac{(0.15)^2}{9}}} < \frac{2.65 - 2.60}{\sqrt{\frac{(0.15)^2}{9}}}\right) = \Pr\left(Z < \frac{0.05}{\frac{0.15}{3}}\right) = \Pr\left(Z < 1\right) =$$

$$= \Phi(1) = 0.8413$$

e) Seja V o maior preço na amostra, ou seja, V = máx(X_1, X_2, ..., X_9). Queremos saber Pr(V > 2.66).

$$\Pr\left(V > 2.66\right) = 1 - \Pr\left(V \le 2.66\right) = 1 - \Pr\left(X_1 \le 2.66, X_2 \le 2.66, ..., X_9 \le 2.66\right) = 1 - \left\{\Pr\left(X_1 \le 2.66\right)\right\}^9 =$$

$$= 1 - \left\{\Pr\left(\frac{X_1 - 2.60}{0.15} \le \frac{2.66 - 2.60}{0.15}\right)\right\}^9 = 1 - \left\{\Phi\left(0.4\right)\right\}^9 = 1 - \left(0.6554\right)^9 =$$

$$= 0.9777$$

f) Seja U o menor preço na amostra, isto é, U = min(X_1, X_2, ..., X_9). Queremos encontrar Pr(U < 2.56).

$$\Pr\left(U < 2.56\right) = 1 - \Pr\left(U \ge 2.56\right) = 1 - \Pr\left(X_1 \ge 2.56, X_2 \ge 2.56, ..., X_9 \ge 2.56\right) =$$

$$1 - \left\{\Pr\left(X_1 \ge 2.56\right)\right\}^9 = 1 - \left\{\Pr\left(\frac{X_1 - 2.60}{0.15} \ge \frac{2.56 - 2.60}{0.15}\right)\right\}^9 =$$

$$= 1 - \left\{1 - \Phi\left(-0.4\right)\right\}^9 = 1 - \left(\Phi\left(+0.4\right)\right)^9 = 1 - \left(0.6554\right)^9 =$$

$$= 0.9777$$

PROBLEMA 5 (20 pontos)

Numa certa área de classe média/média-alta da cidade, o consumo médio residencial de eletricidade é uma variável Normal com média 300 kWh e desvio padrão 100 kWh. A empresa de energia elétrica decidiu auditar um prédio com 16 apartamentos numa área da cidade com as mesmas características e encontrou, no prédio, um consumo médio de 230 kWh. Você acha que existe fraude no prédio? Por que? Justifique a sua resposta com arqumentos probabilísticos.

Solução

Seja X o consumo médio residencial de energia elétrica. X é N(300, $(100)^2$) por hipótese.

Toma-se uma amostra de 16 apartamentos num prédio e observa-se $\overline{X} = 230$. Este valor é plausível?

Pode-se calcular $\Pr\left(\overline{X} > 230\right)$ e verificar se é grande, ou alternativa, verificar se $\Pr\left(\overline{X} < 230\right)$ é muito pequena, pois isso indicará que 230 kWh é um valor que está MUITO ABAIXO DA MÉDIA, sugerindo a existência de fraude.

$$\Pr\left(\overline{X} < 230\right) = \Pr\left(\frac{\overline{X} - 300}{\sqrt{\frac{(100)^2}{16}}} < \frac{230 - 300}{\sqrt{\frac{(100)^2}{16}}}\right) = \Pr\left(Z < \frac{-70}{\frac{100}{4}}\right) = \Pr\left(Z < \frac{-70}{25}\right) = \Pr\left(Z < -2.8\right) =$$

$$= \Phi(-2.8) = 1 - \Phi(+2.8) = 1 - 0.9974 = 0.0026$$

O que é muito pequeno, sugerindo que está ocorrendo fraude.

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0,0000	50,00%		0,9800	83,65%		2,0100	97,78%
0,0100	50,40%		0,9882	83,85%		2,0125	97,79%
0,0200	50,80%		0,9900	83,89%		2,0200	97,83%
0,0300	51,20%		1,0000	84,13%		2,0300	97,88%
0,0400	51,60%		1,0100	84,38%		2,0400	97,93%
0,0500	51,99%		1,0167	84,54%		2,0412	97,94%
0,1000	53,98%		1,0250	84,73%		2,0500	97,98%
0,1042	54,15%		1,0300	84,85%		2,1000	98,21%
0,1500	55,96%		1,0500	85,31%		2,1875	98,56%
0,2000	57,93%		1,0553	85,44%		2,2000	98,61%
0,2236	58,85%		1,1000	86,43%		2,2361	98,73%
0,2500	59,87%		1,1475	87,44%		2,3000	98,93%
0,3000	61,79%		1,1500	87,49%		2,3263	99,00%
0,3015	61,85%		1,1553	87,60%		2,3333	99,02%
0,3333	63,06%		1,1667	87,83%		2,4000	99,18%
0,3475	63,59%		1,2000	88,49%		2,5000	99,38%
0,3492	63,65%		1,2200	88,88%		2,5500	99,46%
0,3500	63,68%		1,2500	89,44%		2,5628	99,48%
0,4000	65,54%		1,2700	89,79%		2,6000	99,53%
0,4167	66,16%		1,2816	90,00%		2,6500	99,60%
0,4307	66,67%		1,3000	90,32%		2,6667	99,62%
0,4500	67,36%		1,3333	90,88%		2,6833	99,64%
0,5000	69,15%		1,3750	91,54%		2,7000	99,65%
0,5500	70,88%		1,4000	91,92%		2,7500	99,70%
0,5774	71,81%		1,4468	92,60%		2,8000	99,74%
0,6000	72,57%		1,4500	92,65%		2,9000	99,81%
0,6250	73,40%		1,5000	93,32%		2,9500	99,84%
0,6500	74,22%		1,5500	93,94%		3,0000	99,87%
0,6667	74,75%		1,6000	94,52%		3,1000	99,90%
0,7000	75,80%		1,6450	95,00%		3,1500	99,92%
0,7500	77,34%		1,6667	95,22%		3,2000	99,93%
0,8000	78,81%		1,7000	95,54%		3,8333	99,99%
0,8333	79,77%		1,7917	96,34%			
0,8400	79,95%		1,8000	96,41%			
0,8416	80,00%		1,8250	96,60%			
0,8500	80,23%		1,8500	96,78%			
0,8666	80,69%		1,9000	97,13%			
0,9000	81,59%		1,9500	97,44%			
0,9500	82,89%		1,9600	97,50%			
0,9600	83,15%		1,9800	97,61%			
0,9700	83,40%		1,9900	97,67%			
0,9750	83,52%		2,0000	97,72%			