IND 1115 - Inferência Estatística
Profa. Mônica Barros
Aula de Exercícios – 30/08/2007

Problema 1

Uma gulosa professora de estatística é "fissurada" por trufas de chocolate. Em busca da trufa ideal, ela vai provando chocolates de maneira independente.

A probabilidade dela gostar de uma trufa que prova é 80%. Ela decide passear por um shopping, provando todas as trufas que encontra, e decide parar só ao encontrar a 5a. trufa "maravilhosa" (para "desespero" da balança que tem em casa!).
Qual a probabilidade dela ter que:
a) Provar 6 trufas até encontrar a 5a. trufa maravilhosa?
b) Ter que "sofrer", provando 10 trufas, até encontrar a 5a. trufa maravilhosa?
c) Na média, quantas trufas ela vai ter que provar até encontrar a 5^a. trufa maravilhosa?

Solução

O modelo indicado é Binomial Negativo com r = 5 e p =0.8 pois ela só pára quando encontra a 5^a. trufa maravilhosa.

Seja X o número de tentativas (trufas consumidas) até encontrar a 5^a. trufa maravilhosa.

a) $\Pr(X=6)=\binom{5}{4}(0.8)^5(0.2)^1=5(0.2)(0.8)^5=(0.8)^5=0.3277$

b) $\Pr(X=10)=\binom{9}{4}(0.8)^5(0.2)^5=0.0132$

c) A média de uma variável Binomial Negativa é r/p, neste caso, 5/0.8 = 6.25.

Problema 2

Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade Geométrica com probabilidade p, isto é: $\Pr(X=x)=(1-p)^{x-1}p$ onde $x=1,2,....$
Encontre a função geradora de momentos de X e, a partir dela, a média de X.

Solução

A função geradora de momentos de X é:

$$E\left(e^{tX}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}e^{tx}\left(1-p\right)^{x-1}p=p\left(1-p\right)^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{e^{tx}\left(1-p\right)^{x}\right\}=p\left(q\right)^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\left(qe^{t}\right)^{x}\right\}=$$

$$=\frac{p}{q}\left\{\frac{qe^{t}}{1-qe^{t}}\right\}=\frac{pe^{t}}{1-qe^{t}}\quad \text{desde que } \left|qe^{t}\right|<1$$

A primeira derivada da função geradora de momentos é:

$$\frac{dM(t)}{dt}=\frac{pe^{t}\left(1-qe^{t}\right)-\left(-qe^{t}\right)pe^{t}}{\left(1-qe^{t}\right)^{2}}$$

$$E(X)=\left.\frac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{p(1-q)-(-q)p}{(1-q)^{2}}=\frac{p}{p^{2}}=\frac{1}{p}$$

Problema 3

Você trabalha numa empresa de consultoria. Apenas 10% dos projetos apresentados resultam num contrato. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que o primeiro contrato acontecerá no 4^{o}. projeto apresentado.
b) De que o 3^{o}. contrato fechado acontecerá no 6^{o}. projeto apresentado.
c) Se você faz exatamente 15 apresentações de projeto num mês, qual a probabilidade de fechar 2 contratos?
d) Quais são os modelos probabilísticos usados nos itens a), b) e c) – basta escrever os nomes e os valores dos parâmetros.

Solução

a) Neste caso X representa a tentativa (ou apresentação) em que ocorre o 1^{o}. fechamento de contrato e X é uma variável Geométrica com probabilidade p = 0.1. Logo:

$$\Pr\left(X=4\right)=\left(0.9\right)^{3}\left(0.1\right)=0.0729$$

b) Aqui a variável de interesse é o número de apresentações até que o 3^{a}. contrato seja fechado, ou seja, trata-se de uma variável Binomial Negativa com parâmetros r = 3 e p = 0.1.

$$\Pr\left(X=6\right)=\binom{5}{2}\left(0.9\right)^{3}\left(0.1\right)^{3}=0.0073$$

c) Neste caso o número de chamadas é fixo a priori e portanto temos uma variável Binomial. X aqui representa o número de apresentações que resultaram em contratos fechados dentre as 15 apresentações realizadas num mês. Então X é Bin(n = 15, p = 0.1).

$$\Pr\left(X=2\right)=\binom{15}{2}\left(0.1\right)^{2}\left(0.9\right)^{13}=0.2669$$

e) Os modelos são, respectivamente, Geométrica(p = 0.1), NegBinomial (r = 3, p = 0.1) e Binomial (n = 15, p = 0.1)

Problema 4

Suponha que X, a nota de uma pessoa num concurso público, é uma variável aleatória contínua com densidade $f(x) = cx^3$ onde $0 < x < 100$.

a) Ache a constante c que faz de f(x) uma densidade.

b) Encontre a função de distribuição de X.

c) Qual a probabilidade de uma pessoa qualquer tirar mais de 50 na prova?

d) Encontre a nota média na prova.

e) Encontre um ponto m no intervalo (0,100) tal que $\Pr(X > m) = \Pr(X \leq m) = 50\%$. Este ponto é a *mediana* da distribuição.

Solução

a) $\int_0^{100} cx^3 dx = 1 \Leftrightarrow c \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^{100} = \frac{c(10)^8}{4} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{4}{10^8}$

b) F(x) = 0 se x < 0, F(x) = 1 se x >1

$$F(x) = \int_0^x \frac{4}{10^8} t^3 dt = \frac{x^4}{10^8} \quad \text{onde } 0 \leq x \leq 1$$

c) Pr(X > 50) = $\int_{50}^{100} \frac{4}{10^8} t^3 dt = \frac{1}{10^8}\left\{10^8 - 5^4 10^4\right\} = \frac{1}{10^8} = \frac{4(93750000)}{10^8} = 0.9375$

d) E(X) = $\int_0^{100} x \frac{4}{10^8} x^3 dx = \frac{4}{10^8}\left(\left.\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^{100} = \frac{4}{5}\left(\frac{10^{10}}{10^8}\right) = \frac{400}{5} = 80$

e) Pr(0 < X < m) = F(m) = 50%

E aproveitando o item b):

$$\frac{m^4}{10^8} = 0.5 \Leftrightarrow m^4 = 0.5(10)^8 \Leftrightarrow m = 84.0896$$

Problema 5

Um terrorista quer envenenar as pessoas numa festa. Nela, são servidas 60 refeições individuais, das quais 6 estão envenenadas. Qual a probabilidade de, numa mesa de 8 convidados, pelo menos uma pessoa ser envenenada?

Solução

Seja X o número de pessoas envenenadas nesta mesa. Então:

$$\Pr\left(X = x\right) = \frac{\binom{6}{x}\binom{54}{8-x}}{\binom{60}{8}}$$

Queremos encontrar a probabilidade de pelo menos uma pessoa envenenada, isto é, Pr(X=1) + Pr(X=2) +...+ Pr(X=8) = 1 – Pr(X = 0)

Mas,

$$\Pr\left(X = 0\right) = \frac{\binom{6}{0}\binom{54}{8}}{\binom{60}{8}} = \frac{\binom{54}{8}}{\binom{60}{8}} = 0.4067$$

E a probabilidade desejada é: 1- 0.4067 = 0.5933