IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2007.02
Teste 2 – 30/10/2007
Nome: ____

NOTA: ESCREVA AS RESPOSTAS COMO FRAÇÕES OU COM 4 CASAS DECIMAIS
NOTA 2: O FORMULÁRIO ESTÁ NO FINAL DA PROVA

Problema 1 (25 pontos)

A quantidade de refrigerante numa garrafa PET de 2 litros é, segundo o fabricante, sujeita a alguma variação aleatória. Em média, cada garrafa contém exatamente 2 litros = 2000 ml, com desvio padrão 50 ml.

Um fiscal do governo examina um lote com 24 garrafas. Se a quantidade total contida nas garrafas for menor que 47 litros, a empresa será multada.

Qual a probabilidade disso acontecer?

Solução

Seja X_i = quantidade de refrigerante na i-ésima garrafa, i =1,2,...,24.

Seja T a quantidade total nas 24 garrafas, $T = \sum_{i=1}^{24} X_i$. Então T tem média 24(2000) = 48000 ml e variância $24(50)^2$ ml^2.

A probabilidade desejada é: (abaixo usamos o Teorema Central do Limite pois temos uma soma de variáveis aleatórias independentes)

$$\Pr(T < 47000) = \Pr\left(\frac{T - 48000}{50\sqrt{24}} < \frac{47000 - 48000}{50\sqrt{24}}\right) = \Pr\left(Z < \frac{-1000}{50\sqrt{24}}\right) = \Pr(Z < -4.0825) = \Phi(-4.0825) \approx 0$$

Problema 2 (35 pontos)

Considere os preços do litro das gasolinas aditivada e premium nos postos. Uma amostra de postos revela que os preços por litro da gasolina **aditivada** têm distribuição Normal com média R$ 2,50 e desvio padrão R$ 0,15. Os preços por litro da gasolina **premium** têm distribuição Normal com média 2,65 e desvio padrão R$ 0,20. A correlação entre os preços das duas gasolinas é 80%. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De alguém pagar entre R$ 2,275 e R$ 2,725 por um litro de gasolina aditivada.
b) De alguém pagar entre R$ 2,275 e R$ 2,725 por um litro de gasolina aditivada sabendo que neste posto o litro da gasolina premium custa R$ 2,85.
c) De alguém pagar entre R$ $ 2,275 e R$ 2,725 por um litro de gasolina aditivada sabendo que neste posto o litro da gasolina premium custa R$ 2,55.
d) Qual é a distribuição condicional dos preços da gasolina premium sabendo que o preço praticado da gasolina aditivada é R$ 2,725 por litro?
e) Quanto um posto deve cobrar por litro para que a sua gasolina aditivada esteja entre as 5% mais baratas?
f) Toma-se uma amostra de 9 postos de gasolina. Qual a probabilidade de que o preço médio da gasolina aditivada na amostra ultrapasse R$ 2,56?

g) Considere a amostra de 9 postos. Qual a probabilidade do posto que cobra mais barato na amostra cobrar mais de R$ 2,525 pela gasolina aditivada?

Solução

X (o preço da gasolina aditivada) é N(2.50, $(0.15)^2$).
Y (o preço da gasolina premium) é N(2.65, $(0.20)^2$).
a) Pr(2.275 < X < 2.725) =

$$\Pr\left(\frac{2.275-2.5}{0.15} < \frac{X-2.5}{0.15} < \frac{2.725-2.5}{0.15}\right) = \Pr(-1.5 < Z < 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) =$$

$$= 2.\Phi(1.5) - 1 = 2(0.9332)\text{ -}1 = 0.8664$$

b) Pr(2.275 < X < 2.725.90 < X < 2.10 | Y = 2.85) = ?
A distribuição condicional é:

$$N\left(\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_y), \sigma_x^2(1-\rho^2)\right) = N\left(2.50 + 0.8\frac{0.15}{0.20}(2.85-2.65), (0.15)^2(1-0.64)\right) =$$

$$= N\left(2.62, (0.15)^2(0.6)^2\right) = N\left(2.62, (0.09)^2\right)$$

$$\Pr\left(\frac{2.275-2.62}{0.09} < \frac{X-2.62}{0.09} < \frac{2.725-2.62}{0.09}\right) = \Pr(-3.8333 < Z < 1.1667) = \Phi(1.1667) - \Phi(-3.8333) =$$

$$= 0.8783$$

c) Pr(2.275 < X < 2.725.90 < X < 2.10 | Y = 2.55) = ?
A distribuição condicional é:

$$N\left(\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_y), \sigma_x^2(1-\rho^2)\right) = N\left(2.50 + 0.8\frac{0.15}{0.20}(2.55-2.65), (0.15)^2(1-0.64)\right) =$$

$$= N\left(2.44, (0.15)^2(0.6)^2\right) = N\left(2.44, (0.09)^2\right)$$

$$\Pr\left(\frac{2.275-2.44}{0.09} < \frac{X-2.44}{0.09} < \frac{2.725-2.44}{0.09}\right) = \Pr(-1.8333 < Z < 3.1667) = \Phi(3.1667) - \Phi(-1.8333) =$$

$$= 0.9659$$

d) A distribuição condicional dos dos preços da gasolina premium sabendo que o preço praticado da gasolina aditivada é R$ 2,725 por litro é Normal com média:

$$\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x) = 2.65 + 0.8\frac{0.20}{0.15}(2.725-2.5) = 2.89$$

e variância $\left(\sigma_y^2(1-\rho^2)\right) = (0.20)^2(1-0.64) = (0.20)^2(0.36) = (0.20)^2(0.60)^2 = (0.12)^2$

e) Para estar entre as 5% mais baratas, o preço da gasolina aditivada deve ser:

$$\frac{X-2.50}{0.15} < -1.645 \Rightarrow X < 2.5 + 0.15(-1.645) = 2.2533$$

f) Considere agora uma amostra de 9 postos. O preço médio da gasolina aditivada nestes postos tem densidade Normal com média 2.50 e variância $(0.15)^2/9$. A probabilidade desejada é:

$$\Pr(\overline{X} > 2.56) = \Pr\left(\frac{\overline{X} - 2.50}{0.15/3} > \frac{2.56 - 2.50}{0.15/3}\right) = \Pr\left(Z > \frac{0.06}{0.05}\right) = \Pr(Z > 1.2) = 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151$$

g) Seja U o mínimo dos 9 postos na amostra. A probabilidade a ser calculada é:

Pr(U > 2.525) = Pr(X_1 > 2.525, X_2 > 2.525, ..., X_9 > 2.525) = { Pr(X_1 > 2.525) }^{9} pois os X_i ´s são independentes e identicamente distribuídos. Mas:

Pr(X_1 > 2.525) =

$$\Pr(X_1 > 2.525) = \Pr\left(\frac{X_1 - 2.50}{0.15} > \frac{2.525 - 2.50}{0.15}\right) = \Pr(Z > 0.16667) = 1 - \Phi(0.1667) = 1 - 0.5662 = 0.4338$$

PROBLEMA 3 (20 pontos)

Seja X_1 , X_2 , ... , X_n uma amostra aleatória da densidade N(0,θ).

a) Mostre que o estimador de máxima verossimilhança de θ é $T = \frac{1}{n}\sum X_i^2$

b) Calcule E(T). Dica: Qual a densidade de X_i^2 (ou de um múltiplo dele)?

Solução

a) A verossimilhança é:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{\frac{-X_i^2}{2\theta}\right\} = (2\pi\theta)^{-n/2} \exp\left\{\frac{-1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right\}$$

A log-verossimilhança é:

$$l(\theta) = \frac{-n}{2}\log(2\pi\theta) + \frac{-1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

A primeira derivada da log-verossimilhança é:

$$\frac{dl(\theta)}{d\theta} = \frac{-n}{2}.\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

A densidade de

$$Z = \frac{X_i}{\sqrt{\theta}} \text{ é N(0,1). Logo, } Z^2 = \frac{X_i^2}{\theta} \text{ é Qui-Quadrado com 1 grau de liberdade e assim: } E\left(\frac{X_i^2}{\theta}\right) = 1 \Rightarrow E(X_i^2) = \theta$$

Então:

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \frac{1}{n}\sum E(X_i^2) = \frac{1}{n}\sum \theta = \frac{n\theta}{n} = \theta$$

PROBLEMA 4 (20 pontos)

Seja Y ~ Bin(12 , 1/2).

a) Calcule Pr(Y ≥ 9) exatamente.

b) Calcule Pr(Y ≥ 9) aproximadamente pelo teorema de DeMoivre e Laplace com correção de continuidade.

c) Calcule Pr(Y = 7) exatamente.

d) Calcule Pr(Y= 7) aproximadamente pelo teorema de DeMoivre e Laplace com correção de continuidade.

Solução

a) Cálculo exato:

x	Pr(X=x)
9	0.0537
10	0.0161
11	0.0029
12	0.0002
soma	**0.0730**

b) Pr(Y ≥ 9) é, com a correção de continuidade, aproximadamente igual a Pr(Y ≥ 8.5), onde esta última é calculada a partir da distribuição Normal.
E(Y) = np = 6
VAR(Y) = npq = 6(1/2) = 3

$$\Pr\left(Y \geq 9\right) \approx \Pr\left(Y \geq 8.5\right) = \Pr\left(\frac{Y-6}{\sqrt{3}} \geq \frac{8.5-6}{\sqrt{3}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{8.5-6}{\sqrt{3}}\right) = 1-\Phi\left(1.4434\right) =$$

$$= 1-0.9255 = 0.0745$$

c) $\Pr(Y=7) = \binom{12}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 0.1934$

d) Pela aproximação do Teorema de DeMoivre e Laplace:

$$\Pr\left(Y = 7\right) \approx \Pr\left(6.5 \leq Y \leq 7.5\right) = \Pr\left(\frac{6.5-6}{\sqrt{3}} \leq \frac{Y-6}{\sqrt{3}} \leq \frac{7.5-6}{\sqrt{3}}\right) = \Phi\left(\frac{7.5-6}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{6.5-6}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \Phi\left(0.8660\right) - \Phi\left(0.2887\right) = 0.8068 - 0.6136 = 0.1932$$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0,0000	50,00%		0,9650	83,27%		1,9500	97,44%
0,0100	50,40%		0,9700	83,40%		1,9600	97,50%
0,0200	50,80%		0,9750	83,52%		1,9800	97,61%
0,0300	51,20%		0,9800	83,65%		1,9900	97,67%
0,0500	51,99%		0,9882	83,85%		2,0000	97,72%
0,1000	53,98%		0,9900	83,89%		2,0100	97,78%
0,1042	54,15%		1,0000	84,13%		2,0125	97,79%
0,1500	55,96%		1,0100	84,38%		2,0200	97,83%
0,2000	57,93%		1,0167	84,54%		2,0300	97,88%
0,2236	58,85%		1,0250	84,73%		2,0400	97,93%
0,2500	59,87%		1,0300	84,85%		2,0412	97,94%
0,2887	61,36%		1,0500	85,31%		2,0500	97,98%
0,3000	61,79%		1,0553	85,44%		2,1000	98,21%
0,3015	61,85%		1,1000	86,43%		2,1875	98,56%
0,3333	63,06%		1,1475	87,44%		2,2000	98,61%
0,3475	63,59%		1,1500	87,49%		2,2361	98,73%
0,3492	63,65%		1,1553	87,60%		2,3000	98,93%
0,3500	63,68%		1,1667	87,83%		2,3263	99,00%
0,4000	65,54%		1,2000	88,49%		2,3333	99,02%
0,4167	66,16%		1,2200	88,88%		2,4000	99,18%
0,4307	66,67%		1,2500	89,44%		2,5000	99,38%
0,4500	67,36%		1,2700	89,79%		2,5500	99,46%
0,5000	69,15%		1,2816	90,00%		2,5628	99,48%
0,5500	70,88%		1,3000	90,32%		2,6000	99,53%
0,5774	71,81%		1,3333	90,88%		2,6500	99,60%
0,6000	72,57%		1,3750	91,54%		2,6667	99,62%
0,6250	73,40%		1,4000	91,92%		2,6833	99,64%
0,6500	74,22%		1,4434	92,55%		2,7000	99,65%
0,6667	74,75%		1,4468	92,60%		2,7500	99,70%
0,7000	75,80%		1,4500	92,65%		2,8000	99,74%
0,7500	77,34%		1,5000	93,32%		2,9000	99,81%
0,8000	78,81%		1,5500	93,94%		2,9500	99,84%
0,8333	79,77%		1,6000	94,52%		3,0000	99,87%
0,8400	79,95%		1,6450	95,00%		3,1000	99,90%
0,8500	80,23%		1,6667	95,22%		3,1500	99,92%
0,8660	80,68%		1,7000	95,54%		3,1667	99,92%
0,8666	80,69%		1,7917	96,34%		3,2000	99,93%
0,9000	81,59%		1,8000	96,41%		3,8333	99,99%
0,9332	82,46%		1,8333	96,66%			
0,9500	82,89%		1,8500	96,78%			
0,9600	83,15%		1,9000	97,13%			

IND 1115 - Inferência Estatística
Profa. Mônica Barros
FORMULÁRIO P2

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância	fgm
Uniforme	$f(x)=\frac{1}{b-a}\quad \text{se } a\le x\le b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Não é útil
Exponencial	$f(x)=\lambda.\exp(-\lambda.x)\quad \text{onde } \lambda>0 \text{ e } x\ge 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)$ se $t<\lambda$
Gama	$f(x)=\begin{cases}\frac{\beta^\alpha.x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.e^{-\beta x}, & \text{onde x} \ge 0\\ 0 & \text{se x} < 0\end{cases}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ se $t<\beta$
Qui-Quadrado	$f(x)=\frac{1}{2^{n/2}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}$	n	2n	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ se $t<1/2$
Normal	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	μ	σ^2	$\exp\left\{\mu.t+\frac{\sigma^2t^2}{2}\right\}$
Binomial	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$ para $x=0,1,2,\ldots,n$	n.p	n.p.q	$(pe^t+q)^n$
Hipergeométrica	$f(x)=\Pr(X=x)=\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n.\left(\frac{r}{N}\right)$	$n.\left(\frac{r}{N}\right)\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	Não é útil
Geométrica	$f(n)=\Pr(X=n)=(1-p)^{n-1}p$ onde n = 1, 2, 3, ...	1/p	q/p^2	$M(t)=\frac{pe^t}{1-qe^t}$
Poisson	$\Pr(X=x)=f(x)=\frac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!}$ onde x = 0, 1, 2, ...	λ	λ	$E(e^{tX})=e^{\lambda.(e^t-1)}$
Binomial Negativa	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{x-1}{r-1}.p^r.q^{x-r}$ onde x = r, r + 1, r + 2, ...	r/p	$r.q/p^2$	$M(t)=\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

Resultados Matemáticos

Série Geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty}a^k=1+a+a^2+a^3+.....=\frac{1}{1-a}\quad \text{desde que } |a|<1$$

Teorema Binomial

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\quad \text{onde a e b são número reais e k, n são inteiros} \ge 0$$

Série de Taylor da Exponencial

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+......$$

Função de Distribuição (F(x))

1) F(x) = Pr(X ≤ x)
2) 0 ≤ F (x) ≤ 1
3) F(x) é uma função não decrescente
4) Lim F(x) = 1 se x →+∞
5) Lim F(x) = 0 se x → -∞
6) Se X é uma v.a. contínua, F(x) é contínua. Se X é discreta, F(x) é descontínua

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Relação entre densidade e função de distribuição

Definição: k-ésimo momento

$$E\left(X^k\right) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k . f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} x^k . f(x) = \sum_{\text{todo x}} x^k . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

$$E\left((X-\mu)^k\right) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k . f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k . f(x) = \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: k-ésimo momento central

Em particular, se k = 1: E(X – m) = 0, ou seja, o primeiro momento central é sempre nulo.

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x . f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} x . f(x) = \sum_{\text{todo x}} x . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Média ou Valor Esperado de X

Definição:

$$\sigma^2 = VAR(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 . f(x)dx & \text{se X contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2 . f(x) = \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2 . \Pr(X = x) & \text{se X discreta} \end{cases}$$

Definição: Variância

Fórmula alternativa para o cálculo da variância

$$\sigma^2 = VAR(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Definição: Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{VAR(X)}$$

Definição: Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

$$E(u(X)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) . f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} u(x) . f(x) = \sum_{\text{todo x}} u(x) . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Propriedade – linearidade do valor esperado:

E{a.u(X) + b.v(X)} = a E {u(X)} + b E {v(X)}

Propriedades – Média e Variância de constantes e funções lineares

Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer. Então:

1-) E(a.X + b) = a.E(X) + b

2-) E(a) = a

3-) VAR(a.X+ b) = a^2.VAR(X)

4-) VAR(a) = 0

Poisson como aproximação da Binomial

Se X é Binomial(n, p), onde n é grande e p é pequeno (n > 20 e n.p < 5), pode-se aproximar as probabilidades Binomiais por probabilidades Poisson usando uma Poisson com a mesma média, isto é, usando λ = n.p.

Função Geradora de Momentos (fgm)

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} e^{tx}.f(x) = \sum_{\text{todo x}} e^{tx}.\Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Relação entre Momentos e fgm

$$M^{(k)}(0) = \left.\frac{d^k M(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = E(X^k)$$

Fórmula da Convolução

Seja Y= X_1+X_2 onde X_1 e X_2 são variáveis independentes com densidade conjunta $f(x_1, x_2) = f_1(x_1).f_2(x_2)$. A densidade (ou função de probabilidade de Y) é dada por:

a) No caso contínuo

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1).f_2(y - x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y - x_2).f_2(x_2)dx_2$$

b) No caso discreto

$$g(y) = \sum_{\text{todo } x_1} f_1(x_1).f_2(y - x_1) = \sum_{\text{todo } x_2} f_1(y - x_2).f_2(x_2)$$

Combinações Lineares de variáveis INDEPENDENTES

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **independentes** com médias $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ e variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$.

Seja: $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$

Então, a **média de Y** é:

$$E(Y) = E\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.E(X_i) =$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu_i \quad \text{onde } \mu_i = E(X_i)$$

A **variância de Y** é:

$$VAR(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.VAR(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.\sigma_i^2$$

$$\text{onde } VAR(X_i) = \sigma_i^2$$

E a **fgm de Y** é:

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t(a_0 + a_1X_1 + \ldots + a_nX_n)}\right)$$

$$= E\left(e^{ta_0}e^{ta_1X_1}\ldots.e^{ta_nX_n}\right) =$$

$$= e^{ta_0}E\left(e^{ta_1X_1}\ldots.e^{ta_nX_n}\right)$$

e como conseqüência da independência

$$= e^{ta_0}E\left(e^{ta_1X_1}\right)E\left(e^{ta_2X_2}\right)\ldots E\left(e^{ta_nX_n}\right) =$$

$$e^{ta_0}M_{X_1}(ta_1)M_{X_2}(ta_2)\ldots M_{X_n}(ta_n)$$

Combinações Lineares de variáveis DEPENDENTES

Suponha que as médias e variâncias dos X_i´s são como no caso anterior, mas agora eles são DEPENDENTES, de tal forma que: $COV(X_i, X_j) = COV(X_j, X_i) = \rho_{ij}.\sigma_i.\sigma_j$ onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre X_i e X_j.

Seja Y definido como acima. $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$

Então E(Y) é o mesmo que no caso de variáveis dependentes, MAS:

$$VAR(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.VAR(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j COV\left(X_i, X_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2.\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad \text{onde no 2o. termo i } \neq \text{ j}$$

onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre X_i e X_j

Portfolio

Combinação linear de ativos onde soma dos pesos = 1. Nos nossos exemplos estamos supondo que todos os pesos são positivos.

A média e a variância do portfolio podem ser obtidas diretamente das expressões acima para combinações lineares de variáveis dependentes. NOTAR que, acima no termo da covariância aparecem $a_i.a_j$ e $a_j.a_i$.

Função Gama

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t}dt$$

Propriedades da Função Gama

1) $\Gamma(n) = (n-1).\Gamma(n-1)$ para n > 1
2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ se n é inteiro > 1
3) $\Gamma(1) = 0! = 1$
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Padronização de uma variável aleatória
Se X tem média a e variância b^2 então Z = (X-a)/b tem média 0 e variância 1. Se, além disso, X é Normal, Z também é Normal.

Cálculo de probabilidades para variáveis Normais
Se X é uma variável Normal com média μ e desvio padrão σ então:

$$\Pr(a \le X \le b) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Simetria da tabela da N(0,1)
$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ se z > 0
Combinações Lineares de Variáveis Normais
Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias **independentes**, onde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ e seja $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
Então Y tem distribuição Normal com média μ_y e variância σ_y^2 dadas por:

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{e} \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Casos particulares: se todos os X_i´s acima são iid com média μ e variância σ^2 então a soma é Normal com média $n.\mu$ e variância $n.\sigma^2$ e a média amostral é Normal com média μ e variância σ^2/n.

Densidade Lognormal
Se X é $N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = e^X$ é Lognormal. Pode-se provar que $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ $VAR(Y) = \exp\left(2\mu + \sigma^2\right).\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$ e

Densidade Normal Bivariada
É uma densidade conjunta para duas variáveis X_1 e X_2.

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left(1-\rho^2\right)\sigma_1^2\sigma_2^2}}.\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}.R\right\}$$

Onde $R = \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2.\rho.\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right).\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)$

A densidade marginal de X_1 é $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
A densidade marginal de X_2 é $N(\mu_2, \sigma_2^2)$
As densidades condicionais também são Normais.
A densidade condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ é:

$$(X_1 \mid X_2 = x_2) \sim N\left(\mu_1 + \rho.\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right).\left(x_2 - \mu_2\right), \sigma_1^2.\left(1-\rho^2\right)\right)$$

A densidade condicional de X_2 dado $X_1 = x_1$ é:

$$(X_2 \mid X_1 = x_1) \sim N\left(\mu_2 + \rho.\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right).\left(x_1 - \mu_1\right), \sigma_2^2.\left(1-\rho^2\right)\right)$$

Note que nas expressões das densidades condicionais acima já estão sendo dadas a média e a variância condicionais.
Na densidade Normal bivariada, a condição $\rho = 0$ (correlação nula) é equivalente à independência.

Densidade Beta

$$f(x) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1} \quad \text{onde } 0 < x < 1 \text{ e m,n inteiros} \ge 1$$

Se X ~ Beta (m, n) então:

$$E(X) = \frac{m}{m+n} \qquad VAR(X) = \frac{mn}{(m+n+1)\,(m+n)^2} \qquad \text{e} \qquad E(X^k) = \frac{\Gamma(k+m)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(k+m+n)}$$

Teorema
Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com densidade Unif(0,1). Seja Y_r o r-ésimo número (em ordem crescente) dentre os valores observados de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, de tal forma que Y_1 é o mínimo, Y_2 é o segundo menor, ..., Y_n é o máximo da amostra. Então Yr tem densidade Beta com parâmetros r e n – r + 1.

Teorema Central do Limite (TCL)
Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias **independentes com densidades quaisquer**, onde $E(X_i) = \mu_i$ e $VAR(X_i) = \sigma_i^2$ ambas finitas.
Seja $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Então Y, devidamente padronizado para ter média zero e variância 1 é aproximadamente Normal, desde que o número de termos na soma seja suficientemente grande. O teorema é importante porque serve para X_i´s com QUALQUER distribuição, contínua ou discreta.
Casos Particulares do TCL – se os X´s são iid, todos têm mesma média e variância.

Teorema de DeMoivre e Laplace
Caso particular do TCL aplicado à Binomial. Historicamente apareceu muito antes do TCL. Usa-se quando uma Binomial tem n grande e p proóximo de ½. Se uma Binomial tem n grande e p pequeno, é melhor usar a aproximação Poisson ao invés de DeMoivre e Laplace. Um problema na aplicação de DeMoivre e Laplace é o fato de estarmos aproximando uma variável discreta (Binomial) por uma contínua (Normal). Daí surge a necessidade da correção de continuidade, do contrário não teríamos como calcular Pr(Y=k), por exemplo, usando a aproximação.
Seja Y ~ Bin(n, p) onde n é "grande" e p não está próximo de zero. Então:

$$Z = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{VAR(Y)}} = \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$ **tem aproximadamente uma distribuição N(0,1).**

Correção de Continuidade

Quantidade desejada na distribuição Binomial	Quantidade Calculada através da correção de continuidade	Expressão aproximada usando a densidade Normal
Pr(Y = y)	Pr(y - 0.5 ≤ Y ≤ y + 0.5)	$\Phi\left(\frac{y+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{y-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(Y ≤ y)	Pr(Y ≤ y +0.5)	$\Phi\left(\frac{y+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(Y < y) = Pr(Y ≤ y-1)	Pr(Y ≤ y - 1 + 0.5)	$\Phi\left(\frac{y-1+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)=\Phi\left(\frac{y-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(Y ≥ y)	Pr(Y ≥ y - 0.5)	$1-\Phi\left(\frac{y-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(Y > y) = Pr(Y ≥ y +1)	Pr(Y ≥ y + 1 - 0.5)	$1-\Phi\left(\frac{y+1-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(a ≤ Y ≤ b)	Pr(a - 0.5 ≤ Y ≤ b + 0.5)	$\Phi\left(\frac{b+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$

Teorema – Aditividade da Qui-quadrado
Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias **independentes** e X_i é Qui-Quadrado com k_i graus de liberdade. Então $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ é também Qui-Quadrado, com $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ graus de liberdade.

Teorema – Relação entre Normal e Qui-Quadrado
Seja Z ~ N(0,1) . Então $V = Z^2$ tem densidade Qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

Definição – Amostra Aleatória
É um conjunto de observações independentes e identicamente distribuídas.

Teorema – Distribuição da Média e da Variância amostrais numa amostra Normal
Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra da densidade $N(\mu, \sigma^2)$.

$$\text{Sejam } \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ a média amostral e } S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 \text{ a variância amostral}$$

$$\text{Então } \bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ e } \frac{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1} \text{ e } \bar{X} \text{ e } S^2 \text{ são independentes}$$

Deste resultado deduz-se que:

$$E(S^2)=\sigma^2$$

$$VAR(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

A densidade t de Student – definição
Uma variável t com k graus de liberdade é obtida através de:

$$T=\frac{Z}{\sqrt{V/k}}$$ onde Z e V são independentes, Z é N(0,1) e V é Qui-Quadrado com k graus de liberdade.

À medida que os graus de liberade da distribuição t crescem, ela se aproxima de uma N(0,1).

A distribuição t e amostras Normais
Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra da densidade $N(\mu, \sigma^2)$. Considere e média e variância amostrais como já definidas. Então:

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{S}\sim t_{n-1}$$

Estatística
Estimação Pontual – encontrar “chutes” (estimadores) para parâmetros desconhecidos.
Principais Métodos de Estimação
Método dos momentos
Método de máxima verossimilhança
Método dos mínimos quadrados

Método dos Momentos – a idéia é igualar os momentos amostrais aos momentos da distribuição ($E(X^k)$) tantas vezes quanto necessário até encontrar uma solução única para todos os parâmetros desconhecidos. Se apenas um parâmetro é desconhecido, basta fazer isso uma vez.

Função de Verossimilhança (L(θ))
A função de verossimilhança é a densidade conjunta encarada como função do parâmetro θ. Isto é: $L(\theta)=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\theta\right)$

Log-verossimilhança (l(θ))
É o logaritmo na base e da verossimilhança.

Método da Máxima Verossimilhança

Consiste em achar um estimador que maximiza a verossimilhança (ou, de modo equivalente, a log-verossimilhança). Em geral, ele é encontrado por Cálculo, resolvendo-se a equação $dl/d\theta = 0$, mas existem exceções, como a densidade Uniforme.