IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2007.02
Teste 3 – 03/12/2007
Nome: ____

NOTA: ESCREVA AS RESPOSTAS COMO FRAÇÕES OU COM 4 CASAS DECIMAIS
NOTA 2: O FORMULÁRIO ESTÁ NO FINAL DA PROVA

Problema 1 (25 pontos)

Você é o Secretário de Fazenda de uma cidade e acabou de tomar posse. No passado, você notou que, a partir de uma amostra das maiores 256 empresas na cidade, a arrecadação de tributos por empresa era, em média, R$ 1 milhão, com desvio padrão (amostral) R$ 200 mil.

Você decide implementar uma grande mudança na secretaria de Fazenda, intensificando a fiscalização. Logo no primeiro mês da sua gestão, o valor médio arrecadado nas 256 maiores empresas passou para R$ 1.2 milhões.

Empregando argumentos de IC, diga se você pode concluir, com alta probabilidade (95% ou 99%), que as medidas propostas por você resultaram num aumento significativo da arrecadação.

Solução

Para começar a resolver o problema, precisamos decidir qual IC usar. Este é um caso típico de grandes amostras – note que, em nenhum lugar do enunciado diz-se que a distribuição é Normal, mas fala-se do tamanho da amostra (256), bastante grande.

A forma do IC desejado é:

$$\left(\overline{X} - z.\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z.\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \left(1200000 - z\frac{200000}{\sqrt{256}}, 1200000 + z\frac{200000}{\sqrt{256}}\right) =$$

$$= (1{,}200{,}000 - z(12500), 1{,}200{,}000 + z(12500))$$

Para um IC 95%: z = 1.96 e então o IC torna-se (1,175,500 , 1,224,499)
Para um IC 99%: z = 2.576 e então o IC torna-se (1,167,802 , 1,232,197)

Em ambos os casos, a arrecadação anterior (R$ 1 milhão) está fora do IC, indicando que as medidas tomadas para aumentar a arrecadação surtiram efeito.

Problema 2 (25 pontos)

Um país tem que decidir uma questão importante num referendo. Você trabalha numa empresa de pesquisas, e faz uma pesquisa de "boca de urna" para medir a proporção de eleitores que dizem ter votado a favor da questão no referendo, tentando inferir sobre a real proporção de eleitores na população favoráveis à tal proposta. A sua amostra tem 625 eleitores, dos quais 300 foram favoráveis à questão. Encontre um IC 90% aproximado para o valor verdadeiro de p, a proporção de eleitores na população favoráveis à proposta.

Solução

A forma do IC aproximado para p é:

$$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$ Onde $z_{1-\alpha/2}$ obtido da densidade N(0,1) tal que

$\Pr(Z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$

Neste caso:

$\hat{p} = \frac{300}{625} = 0.48$ e para um IC 90%, z = 1.645. Logo, o IC 90% para p é:

$$\left(0.48 - 1.645\sqrt{\frac{0.48(0.52)}{625}}, 0.48 + 1.645\sqrt{\frac{0.48(0.52)}{625}} \right) = (0.48 - 0,0329, 0.48 + 0,0329) = (0.4471,\ 0.5129)$$

Então, com base na nossa “boca de urna” não é possível saber se a proposta será ou não aprovada, pois o IC inclui valores abaixo e acima de 50%.

PROBLEMA 3 (25 pontos)

Considere uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição Geométrica(p), ou seja, a função de probabilidade é dada por:

$$\Pr(X = x) = f(x) = q^{x-1} p = (1-p)^{x-1} p \quad \text{para } x = 1,2,3.....$$

a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de p.

b) Encontre o MLE de Pr(X > 2).

c) Encontre a informação de Fisher.

Dica: Série Geométrica

$$\sum_{x=1}^{\infty} a^x = \frac{a}{1-a} \quad \text{se} |a| < 1$$

Solução

A verossimilhança é:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i - 1} p = (1-p)^{\sum x_i - n} p^n$$

A log-verossimilhança é:

$$l(p) = \ln L(p) = \left(\sum x_i - n\right)\log(1-p) + n\log(p)$$

Derivando em relação a p e igualando a zero temos:

$$\frac{\partial l}{\partial p} = -\frac{\sum x_i - n}{1-p} + \frac{n}{p} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\overline{X} - n}{1-p} = \frac{n}{p} \Leftrightarrow \frac{p}{1-p} = \frac{n}{n\overline{X} - n} \Leftrightarrow \frac{p}{1-p} = \frac{1}{\overline{X} - 1} \Leftrightarrow \hat{p}\overline{X} - \hat{p} = 1 - \hat{p}$$

$$\Leftrightarrow \hat{p}\overline{X} = 1 \Leftrightarrow \hat{p} = \frac{1}{\overline{X}} = \frac{n}{\sum X_i}$$

b) O MLE de Pr(X > 2) pode ser calculado pelo princípio de invariância.

$$\Pr(X > 2) = \Pr(X \geq 3) = 1 - \Pr(X = 1) - \Pr(X = 2) = 1 - q^0 p - q^1 p = 1 - p - qp = 1 - p(1+q) = 1 - p(1+1-p) =$$
$$= 1 - p(2-p) = 1 - 2p + p^2$$

Substituindo p por seu MLE leva a:
$1 - \frac{2}{\overline{X}} + \frac{1}{\overline{X}^2}$, que é o MLE desejado.

c) A informação de Fisher é calculada a seguir:
$$I(p) = VAR\left(\frac{\partial l}{\partial p}\right) = VAR\left(-\frac{n\overline{X} - n}{1-p} + \frac{n}{p}\right) = VAR\left(-\frac{n\overline{X} - n}{1-p}\right) = VAR\left(\frac{n\overline{X}}{1-p}\right) = \frac{1}{(1-p)^2} VAR\left(\sum X_i\right)$$
Mas, a variância de cada X_i é q/p^2 e eles são independentes, portanto:
$$VAR(\sum X_i) = n\frac{q}{p^2}$$
$$I(p) = \frac{1}{q^2}\left(\frac{nq}{p^2}\right) = \frac{n}{p^2 q}$$

PROBLEMA 4 (25 pontos)

Sejam X_1, X_2, X_3 com função de probabilidade conjunta Multinomial com parâmetros n, p_1, p_2, p_3. Então a VEROSSIMILHANÇA é:

$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{n!}{x_1! x_2! x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$ onde $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ e $x_1 + x_2 + x_3 = n$, $0 < p_i < 1$ e os x_i´s inteiros não negativos sujeitos à restrição de somarem a n.

Mostre que os estimadores de máxima verossimilhança de p_1 e p_2 são:

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n} \quad \text{e} \quad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n}$$

E o de p_3 é:

$$\hat{p}_3 = 1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 1 - \frac{x_1}{n} - \frac{x_2}{n} = \frac{n - x_1 - x_2}{n} = \frac{x_3}{n}$$

DICA:

Não se esqueça de usar as restrições! Só existem 2 parâmetros "livres" aqui (por exemplo, p_1 e p_2) e não 3 parâmetros livres, e portanto você só tem que otimizar para estes dois parâmetros.

Solução

A log-verossimilhança é:
$$l(p_1, p_2) = k + x_1 \ln(p_1) + x_2 \ln(p_2) + (n - x_1 - x_2)\ln(1 - p_1 - p_2)$$
Onde k não envolve nem p_1 nem p_2 e portanto irá sumir quando derivarmos, então não precisamos nos preocupar com ele.

Derivando com relação a cada um dos parâmetros e igualando a zero:
$$\frac{\partial l}{\partial p_1} = \frac{x_1}{p_1} - \frac{n - x_1 - x_2}{1 - p_1 - p_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1}{p_1} = \frac{n - x_1 - x_2}{1 - p_1 - p_2} \Leftrightarrow \frac{p_1}{1 - p_1 - p_2} = \frac{x_1}{n - x_1 - x_2}$$

$$\frac{\partial l}{\partial p_2} = \frac{x_2}{p_2} - \frac{n - x_1 - x_2}{1 - p_1 - p_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_2}{p_2} = \frac{n - x_1 - x_2}{1 - p_1 - p_2} \Leftrightarrow \frac{p_2}{1 - p_1 - p_2} = \frac{x_2}{n - x_1 - x_2}$$

Seja $1-p_1-p_2 = S$. A soma das duas equações anteriores dá:

$$\frac{p_1 + p_2}{S} = \frac{x_1 + x_2}{n - x_1 - x_2} \Rightarrow p_1 + p_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{n - x_1 - x_2}\right) S$$

Então:

$$S = 1-p_1-p_2 = 1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{n - x_1 - x_2}\right) S \Rightarrow S + \left(\frac{x_1 + x_2}{n - x_1 - x_2}\right) S = 1 \Leftrightarrow S\left(\frac{n - x_1 - x_2 + x_1 + x_2}{n - x_1 - x_2}\right) = 1$$

$$S\left(\frac{n}{n - x_1 - x_2}\right) = 1 \Leftrightarrow S = \frac{n - x_1 - x_2}{n}$$

Da 1ª. Equação:

$$\frac{p_1}{S} = \frac{x_1}{n - x_1 - x_2} \Rightarrow p_1 = \frac{x_1}{n - x_1 - x_2} S = \frac{x_1}{n - x_1 - x_2} . \frac{n - x_1 - x_2}{n} = \frac{x_1}{n} \Rightarrow \hat{p}_1 = \frac{x_1}{n}$$

Analogamente, da 2ª. Equação:

$$\frac{p_2}{S} = \frac{x_2}{n - x_1 - x_2} \Rightarrow p_1 = \frac{x_2}{n - x_1 - x_2} S = \frac{x_2}{n - x_1 - x_2} . \frac{n - x_1 - x_2}{n} = \frac{x_2}{n} \Rightarrow \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n}$$

Empregando a restrição:

$$\hat{p}_3 = 1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 1 - \frac{x_1}{n} - \frac{x_2}{n} = \frac{n - x_1 - x_2}{n} = \frac{x_3}{n}$$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0,0000	50,00%		0,9650	83,27%		1,9500	97,44%
0,0100	50,40%		0,9700	83,40%		1,9600	97,50%
0,0200	50,80%		0,9750	83,52%		1,9800	97,61%
0,0300	51,20%		0,9800	83,65%		1,9900	97,67%
0,0500	51,99%		0,9882	83,85%		2,0000	97,72%
0,1000	53,98%		0,9900	83,89%		2,0100	97,78%
0,1042	54,15%		1,0000	84,13%		2,0125	97,79%
0,1500	55,96%		1,0100	84,38%		2,0200	97,83%
0,2000	57,93%		1,0167	84,54%		2,0300	97,88%
0,2236	58,85%		1,0250	84,73%		2,0400	97,93%
0,2500	59,87%		1,0300	84,85%		2,0412	97,94%
0,2887	61,36%		1,0500	85,31%		2,0500	97,98%
0,3000	61,79%		1,0553	85,44%		2,1000	98,21%
0,3015	61,85%		1,1000	86,43%		2,1875	98,56%
0,3333	63,06%		1,1475	87,44%		2,2000	98,61%
0,3475	63,59%		1,1500	87,49%		2,2361	98,73%
0,3492	63,65%		1,1553	87,60%		2,3000	98,93%
0,3500	63,68%		1,1667	87,83%		2,3263	99,00%
0,4000	65,54%		1,2000	88,49%		2,3333	99,02%
0,4167	66,16%		1,2200	88,88%		2,4000	99,18%
0,4307	66,67%		1,2500	89,44%		2,5000	99,38%
0,4500	67,36%		1,2700	89,79%		2,5500	99,46%
0,5000	69,15%		1,2816	90,00%		2,5628	99,48%
0,5500	70,88%		1,3000	90,32%		2,6000	99,53%
0,5774	71,81%		1,3333	90,88%		2,6500	99,60%
0,6000	72,57%		1,3750	91,54%		2,6667	99,62%
0,6250	73,40%		1,4000	91,92%		2,6833	99,64%
0,6500	74,22%		1,4434	92,55%		2,7000	99,65%
0,6667	74,75%		1,4468	92,60%		2,7500	99,70%
0,7000	75,80%		1,4500	92,65%		2,8000	99,74%
0,7500	77,34%		1,5000	93,32%		2,9000	99,81%
0,8000	78,81%		1,5500	93,94%		2,9500	99,84%
0,8333	79,77%		1,6000	94,52%		3,0000	99,87%
0,8400	79,95%		1,6450	95,00%		3,1000	99,90%
0,8500	80,23%		1,6667	95,22%		3,1500	99,92%
0,8660	80,68%		1,7000	95,54%		3,1667	99,92%
0,8666	80,69%		1,7917	96,34%		3,2000	99,93%
0,9000	81,59%		1,8000	96,41%		3,8333	99,99%
0,9332	82,46%		1,8333	96,66%			
0,9500	82,89%		1,8500	96,78%			
0,9600	83,15%		1,9000	97,13%			

Pontos Percentuais

Variável t com p graus de liberdade

Exemplo

Se T tem densidade t com 12 graus de liberdade, Pr(T <= 1.782) = 95%

Graus de liberdade	60%	75%	80%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	0.325	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.697	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.695	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.684	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.256	0.682	0.853	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744
32	0.255	0.682	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.682	0.853	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.682	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.682	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.681	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
45	0.255	0.680	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
50	0.255	0.679	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	0.254	0.679	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660

Tabela da Função de Distribuição da densidade Qui-quadrado

Cada célula desta tabela contém Pr(X <= x) com as probabilidades especificadas em cada coluna.

Exemplo
Se X tem densidade Qui-quadrado com 12 graus de liberdade, Pr(X <= 8.438)= 0.25

probabilidade → / graus de liberdade ↓	0.5%	1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	25.0%	50.0%	75.0%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.341	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.340	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	12.340	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165	13.339	17.117	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.037	14.339	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912	15.338	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.792	16.338	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	13.675	17.338	21.605	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	14.562	18.338	22.718	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	15.452	19.337	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	16.344	20.337	24.935	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	17.240	21.337	26.039	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	18.137	22.337	27.141	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	19.037	23.337	28.241	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	19.939	24.337	29.339	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	20.843	25.336	30.435	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	21.749	26.336	31.528	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	22.657	27.336	32.620	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	23.567	28.336	33.711	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	24.478	29.336	34.800	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	25.390	30.336	35.887	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	26.304	31.336	36.973	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	27.219	32.336	38.058	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	28.136	33.336	39.141	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	29.054	34.336	40.223	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	29.973	35.336	41.304	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	30.893	36.336	42.383	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	31.815	37.335	43.462	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	32.737	38.335	44.539	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660	39.335	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766

IND 1115 - Inferência Estatística
Profa. Mônica Barros
FORMULÁRIO P2

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância	fgm
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{se } a \le x \le b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Não é útil
Exponencial	$f(x) = \lambda.\exp(-\lambda.x) \quad \text{onde } \lambda > 0 \text{ e } x \ge 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)$ se $t < \lambda$
Gama	$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha . x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} . e^{-\beta x}, \text{ onde } x \ge 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$ se $t < \beta$
Qui-Quadrado	$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} . x^{\frac{n}{2}-1} . e^{-\frac{x}{2}}$	n	2n	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ se $t < 1/2$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	μ	σ^2	$\exp\left\{\mu.t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$
Binomial	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$ para $x = 0, 1, 2, \ldots, n$	n.p	n.p.q	$(pe^t + q)^n$
Hipergeométrica	$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n.\left(\frac{r}{N}\right)$	$n.\left(\frac{r}{N}\right)\left(1 - \frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	Não é útil
Geométrica	$f(n) = \Pr(X = n) = (1-p)^{n-1} p$ onde n = 1, 2, 3, ...	1/p	q/p^2	$M(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$
Poisson	$\Pr(X = x) = f(x) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!}$ onde x = 0, 1, 2, ...	λ	λ	$E(e^{tX}) = e^{\lambda.(e^t - 1)}$
Binomial Negativa	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{x-1}{r-1} . p^r . q^{x-r}$	r/p	$r.q/p^2$	$M(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - qe^t}\right)^r$

onde x = r, r + 1, r + 2, ...

Resultados Matemáticos

Série Geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots.. = \frac{1}{1-a} \quad \text{desde que } |a| < 1$$

Teorema Binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{onde a e b são número reais e k, n são inteiros} \ge 0$$

Série de Taylor da Exponencial

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots\ldots$$

Função de Distribuição (F(x))

1) F(x) = Pr(X ≤ x)
2) 0 ≤ F (x) ≤ 1
3) F(x) é uma função não decrescente
4) Lim F(x) = 1 se x →+∞
5) Lim F(x) = 0 se x → -∞
6) Se X é uma v.a. contínua, F(x) é contínua. Se X é discreta, F(x) é descontínua

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Relação entre densidade e função de distribuição

Definição: k-ésimo momento

$$E(X^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k . f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} x^k . f(x) = \sum_{\text{todo x}} x^k . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

$$E((X - \mu)^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k . f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k . f(x) = \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: k-ésimo momento central

Em particular, se k = 1: E(X – m) = 0, ou seja, o primeiro momento central é sempre nulo.

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x . f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} x . f(x) = \sum_{\text{todo x}} x . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Média ou Valor Esperado de X

Definição:

$$\sigma^2 = VAR(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 . f(x) dx & \text{se X contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2 . f(x) = \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2 . \Pr(X = x) & \text{se X discreta} \end{cases}$$

Definição: Variância

Fórmula alternativa para o cálculo da variância

$$\sigma^2 = VAR(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Definição: Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{VAR(X)}$$

Definição: Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

$$E(u(X)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) . f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} u(x) . f(x) = \sum_{\text{todo x}} u(x) . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Propriedade – linearidade do valor esperado:

E{a.u(X) + b.v(X)} = a E {u(X)} + b E {v(X)}

Propriedades – Média e Variância de constantes e funções lineares

Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer. Então:

1-) E(a.X + b) = a.E(X) + b

2-) E(a) = a

3-) VAR(a.X+ b) = a^2.VAR(X)

4-) VAR(a) = 0

Poisson como aproximação da Binomial

Se X é Binomial(n, p), onde n é grande e p é pequeno (n > 20 e n.p < 5), pode-se aproximar as probabilidades Binomiais por probabilidades Poisson usando uma Poisson com a mesma média, isto é, usando λ = n.p.

Função Geradora de Momentos (fgm)

$$M(t)=E\left(e^{tX}\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} e^{tx}.f(x)=\sum_{\text{todo x}} e^{tx}.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Relação entre Momentos e fgm

$$M^{(k)}(0)=\left.\frac{d^k M(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=E(X^k)$$

Fórmula da Convolução

Seja Y= X_1+X_2 onde X_1 e X_2 são variáveis independentes com densidade conjunta $f(x_1, x_2) = f_1(x_1).f_2(x_2)$. A densidade (ou função de probabilidade de Y) é dada por:

a) No caso contínuo

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1).f_2(y-x_1)dx_1=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y-x_2).f_2(x_2)dx_2$$

b) No caso discreto

$$g(y)=\sum_{\text{todo } x_1} f_1(x_1).f_2(y-x_1)=\sum_{\text{todo } x_2} f_1(y-x_2).f_2(x_2)$$

Combinações Lineares de variáveis INDEPENDENTES

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **independentes** com médias $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ e variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$.

Seja: $Y=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$

Então, a **média de Y** é:

$$E(Y)=E\left(a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i.X_i\right)=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i.E(X_i)=$$
$$=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i.\mu_i \quad \text{onde } \mu_i=E(X_i)$$

A **variância de Y** é:

$$VAR(Y)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2.VAR(X_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2.\sigma_i^2$$
$$\text{onde } VAR(X_i)=\sigma_i^2$$

E a **fgm de Y** é:

$$M_Y(t)=E\left(e^{tY}\right)=E\left(e^{t(a_0+a_1X_1+\ldots+a_nX_n)}\right)$$
$$=E\left(e^{ta_0}e^{ta_1X_1}\ldots e^{ta_nX_n}\right)=$$
$$=e^{ta_0}E\left(e^{ta_1X_1}\ldots e^{ta_nX_n}\right)$$

e como conseqüência da independência

$$=e^{ta_0}E\left(e^{ta_1X_1}\right)E\left(e^{ta_2X_2}\right)\ldots E\left(e^{ta_nX_n}\right)=$$
$$e^{ta_0}M_{X_1}(ta_1)M_{X_2}(ta_2)\ldots M_{X_n}(ta_n)$$

Combinações Lineares de variáveis DEPENDENTES

Suponha que as médias e variâncias dos X_i´s são como no caso anterior, mas agora eles são DEPENDENTES, de tal forma que: $COV(X_i, X_j) = COV(X_j, X_i) = \rho_{ij}.\sigma_i.\sigma_j$ onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre X_i e X_j.

Seja Y definido como acima. $Y=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$

Então E(Y) é o mesmo que no caso de variáveis dependentes, MAS:

$$VAR(Y)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2.VAR(X_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j COV\left(X_i, X_j\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n} a_i^2.\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad \text{onde no 2o. termo i} \neq \text{j}$$

onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre X_i e X_j

Portfolio

Combinação linear de ativos onde soma dos pesos = 1. Nos nossos exemplos estamos supondo que todos os pesos são positivos.

A média e a variância do portfolio podem ser obtidas diretamente das expressões acima para combinações lineares de variáveis dependentes. NOTAR que, acima no termo da covariância aparecem $a_i.a_j$ e $a_j.a_i$.

Função Gama

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t}dt$$

Propriedades da Função Gama

1) $\Gamma(n) = (n-1).\Gamma(n-1)$ para n > 1

2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ se n é inteiro > 1

3) $\Gamma(1) = 0! = 1$

4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

Padronização de uma variável aleatória
Se X tem média a e variância b^2 então Z = (X-a)/b tem média 0 e variância 1. Se, além disso, X é Normal, Z também é Normal.

Cálculo de probabilidades para variáveis Normais
Se X é uma variável Normal com média μ e desvio padrão σ então:

$$\Pr(a \le X \le b) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Simetria da tabela da N(0,1)
$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ se z > 0
Combinações Lineares de Variáveis Normais
Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias **independentes**, onde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ e seja $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
Então Y tem distribuição Normal com média μ_y e variância σ_y^2 dadas por:

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{e} \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Casos particulares: se todos os X_i´s acima são iid com média μ e variância σ^2 então a soma é Normal com média $n.\mu$ e variância $n.\sigma^2$ e a média amostral é Normal com média μ e variância σ^2/n.

Densidade Lognormal
Se X é $N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = e^X$ é Lognormal. Pode-se provar que $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ $\quad VAR(Y) = \exp\left(2\mu+\sigma^2\right).\left(e^{\sigma^2}-1\right)$ e

Densidade Normal Bivariada
É uma densidade conjunta para duas variáveis X_1 e X_2.

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left(1-\rho^2\right)\sigma_1^2\sigma_2^2}}.\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}.R\right\}$$

Onde $R = \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2.\rho.\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right).\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)$

A densidade marginal de X_1 é $N(\mu_1,\sigma_1^2)$
A densidade marginal de X_2 é $N(\mu_2,\sigma_2^2)$
As densidades condicionais também são Normais.
A densidade condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ é:

$$(X_1 \mid X_2 = x_2) \sim N\left(\mu_1 + \rho.\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right).(x_2-\mu_2), \sigma_1^2.\left(1-\rho^2\right)\right)$$

A densidade condicional de X_2 dado $X_1 = x_1$ é:

$$(X_2 \mid X_1 = x_1) \sim N\left(\mu_2 + \rho.\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right).(x_1-\mu_1), \sigma_2^2.\left(1-\rho^2\right)\right)$$

Note que nas expressões das densidades condicionais acima já estão sendo dadas a média e a variância condicionais.
Na densidade Normal bivariada, a condição $\rho = 0$ (correlação nula) é equivalente à independência.

Densidade Beta

$$f(x) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1} \quad \text{onde } 0 < x < 1 \text{ e m, n inteiros} \ge 1$$

Se X ~ Beta (m, n) então:

$$E(X) = \frac{m}{m+n} \qquad VAR(X) = \frac{mn}{(m+n+1)\,(m+n)^2} \qquad \text{e} \qquad E(X^k) = \frac{\Gamma(k+m)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(k+m+n)}$$

Teorema
Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com densidade Unif(0,1). Seja Y_r o r-ésimo número (em ordem crescente) dentre os valores observados de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, de tal forma que Y_1 é o mínimo, Y_2 é o segundo menor, ..., Y_n é o máximo da amostra. Então Yr tem densidade Beta com parâmetros r e n – r + 1.

Teorema Central do Limite (TCL)
Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias **independentes com densidades quaisquer**, onde $E(X_i) = \mu_i$ e $VAR(X_i) = \sigma_i^2$ ambas finitas.
Seja $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Então Y, devidamente padronizado para ter média zero e variância 1 é aproximadamente Normal, desde que o número de termos na soma seja suficientemente grande. O teorema é importante porque serve para X_i´s com QUALQUER distribuição, contínua ou discreta.
Casos Particulares do TCL – se os X´s são iid, todos têm mesma média e variância.

Teorema de DeMoivre e Laplace
Caso particular do TCL aplicado à Binomial. Historicamente apareceu muito antes do TCL. Usa-se quando uma Binomial tem n grande e p proóximo de ½. Se uma Binomial tem n grande e p pequeno, é melhor usar a aproximação Poisson ao invés de DeMoivre e Laplace. Um problema na aplicação de DeMoivre e Laplace é o fato de estarmos aproximando uma variável discreta (Binomial) por uma contínua (Normal). Daí surge a necessidade da correção de continuidade, do contrário não teríamos como calcular Pr(Y=k), por exemplo, usando a aproximação.
Seja Y ~ Bin(n, p) onde n é "grande" e p não está próximo de zero. Então:

$$Z = \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{VAR(Y)}} = \frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$ **tem aproximadamente uma distribuição N(0,1).**

Correção de Continuidade

Quantidade desejada na distribuição Binomial	Quantidade Calculada através da correção de continuidade	Expressão aproximada usando a densidade Normal
Pr(Y = y)	Pr(y - 0.5 ≤ Y ≤ y + 0.5)	$\Phi\left(\frac{y+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{y-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(Y ≤ y)	Pr(Y ≤ y +0.5)	$\Phi\left(\frac{y+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(Y < y) = Pr(Y ≤ y-1)	Pr(Y ≤ y - 1 + 0.5)	$\Phi\left(\frac{y-1+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)=\Phi\left(\frac{y-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(Y ≥ y)	Pr(Y ≥ y - 0.5)	$1-\Phi\left(\frac{y-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(Y > y) = Pr(Y ≥ y +1)	Pr(Y ≥ y + 1 - 0.5)	$1-\Phi\left(\frac{y+1-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(a ≤ Y ≤ b)	Pr(a - 0.5 ≤ Y ≤ b + 0.5)	$\Phi\left(\frac{b+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$

Teorema – Aditividade da Qui-quadrado
Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias **independentes** e X_i é Qui-Quadrado com k_i graus de liberdade. Então $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ é também Qui-Quadrado, com $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ graus de liberdade.
Teorema – Relação entre Normal e Qui-Quadrado
Seja $Z \sim N(0,1)$. Então $V = Z^2$ tem densidade Qui-quadrado com 1 grau de liberdade.
Definição – Amostra Aleatória
É um conjunto de observações independentes e identicamente distribuídas.

Teorema – Distribuição da Média e da Variância amostrais numa amostra Normal
Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra da densidade $N(\mu, \sigma^2)$.

$$\text{Sejam } \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ a média amostral e } S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \text{ a variância amostral}$$

$$\text{Então } \overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ e } \frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1} \text{ e } \overline{X} \text{ e } S^2 \text{ são independentes}$$

Deste resultado deduz-se que:

$$E(S^2)=\sigma^2$$

$$VAR(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

A densidade t de Student – definição
Uma variável t com k graus de liberdade é obtida através de:

$T=\dfrac{Z}{\sqrt{V/k}}$ onde Z e V são independentes, Z é N(0,1) e V é Qui-Quadrado com k graus de liberdade.

À medida que os graus de liberade da distribuição t crescem, ela se aproxima de uma N(0,1).

A distribuição t e amostras Normais
Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra da densidade $N(\mu, \sigma^2)$. Considere e média e variância amostrais como já definidas. Então:

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S}\sim t_{n-1}$$

Estatística
Estimação Pontual – encontrar "chutes" (estimadores) para parâmetros desconhecidos.
Principais Métodos de Estimação
Método dos momentos
Método de máxima verossimilhança
Método dos mínimos quadrados

Método dos Momentos – a idéia é igualar os momentos amostrais aos momentos da distribuição ($E(X^k)$) tantas vezes quanto necessário até encontrar uma solução única para todos os parâmetros desconhecidos. Se apenas um parâmetro é desconhecido, basta fazer isso uma vez.

Função de Verossimilhança (L(θ))
A função de verossimilhança é a densidade conjunta encarada como função do parâmetro θ. Isto é: $L(\theta)=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\theta\right)$
Log-verossimilhança (l(θ))
É o logaritmo na base e da verossimilhança.

Método da Máxima Verossimilhança
Consiste em achar um estimador que maximiza a verossimilhança (ou, de modo equivalente, a log-verossimilhança). Em geral, ele é encontrado por Cálculo, resolvendo-se a equação $dl/d\theta = 0$, mas existem exceções, como a densidade Uniforme.

Definição (Estimador não tendencioso)
Seja T um estimador para o parâmetro θ de uma densidade $f(x, \theta)$. T é chamado de *não tendencioso* se $E(T) = \theta$, do contrário T é dito tendencioso.

Definição (Erro Quadrático Médio)
O erro quadrático médio do estimador T é definido como: $MSE(T) = E\{(T - \theta)^2\} = VAR(T) + \{BIAS(T)\}^2$ onde θ é o parâmetro que T pretende estimar, VAR(T) é a variância de T e BIAS(T) é a tendência ou viés de T, definido como $BIAS(T) = E(T) - \theta$.

Definição (Estimador consistente)
Um estimador T é consistente se seu MSE vai para zero quando n vai para infinito, onde n é o tamanho da amostra.

Método dos Momentos
Seja $E(X^k)$ o k-ésimo momento da distribuição (k =1,2,...).
Seja:

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \quad \text{o k-ésimo momento amostral}$$

Faça $E(X^k) = M_k$ para k = 1,2,....
Faça isto para quantos k's forem necessários até obter soluções únicas para os parâmetros desconhecidos

Definição: Função Score

$$S(X,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}[\log L(\theta)] = \frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}$$

Limite Inferior de Cramér e Rao (ou Desigualdade da Informação)
Seja T um estimador *não tendencioso* de $\tau(\theta)$.
Então, sob certas condições de regularidade:

$$VAR(T) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{I(\theta)} = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{n.E\left\{\left(\frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right\}}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, a verossimilhança tem a forma:

$$L(\theta) = \exp[A(\theta)T(X) + K(\theta) + u(X)]$$

Definição: Informação de Fisher

$$I(\theta) = VAR(S(X,\theta)) = -E\left(\frac{d^2 \log L(\theta)}{d\theta^2}\right)$$

Definição (Estimador Eficiente)
T é chamado um *estimador eficiente* de $\tau(\theta)$ se:
1) T é não tendencioso para $\tau(\theta)$.
2) $VAR[T(\underline{x})] = [\tau'(\theta)]^2 / I(\theta)$
isto é, o estimador T atinge o limite inferior de Cramér e Rao.

Corolário
Se T é um estimador eficiente de $\tau(\theta)$ então T é o melhor estimador não tendencioso de $\tau(\theta)$.

IC para média da Normal com variância conhecida

$$[\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Onde $z_{1-\alpha/2}$ obtido da densidade N(0,1) tal que $Pr(Z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$

IC para média da Normal com variância DESCONHECIDA

$$[\overline{X} - b\frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + b\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

O ponto b que aparece na definição do IC é obtido da distribuição t com n-1 graus de liberdade, e é tal que $Pr(T > b) = \alpha/2$. S acima é o desvio padrão amostral.

IC para a média de uma distribuição qualquer – GRANDES AMOSTRAS

$$\left(\overline{X} - z_{1-\alpha/2}.\frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{1-\alpha/2}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

Onde $z_{1-\alpha/2}$ obtido da densidade N(0,1) tal que $Pr(Z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$ e S é o desvio padrão amostral.

IC para a variância da Normal

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{b}, \frac{(n-1)S^2}{a}\right)$$

onde a e b obtidos da densidade Qui-quadrado com (n-1) graus de liberdade, e $Pr(X<a) = \alpha/2 = Pr(X > b)$ onde X é a variável Qui-quadrado

IC para a diferença das médias de DUAS amostras Normais com variâncias supostas IGUAIS
Amostra 1: $X_1, X_2, ..., X_m$ iid $N(\mu_1, \sigma^2)$
Amostra 2: $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ iid $N(\mu_2, \sigma^2)$
O IC 100(1-α)% para $\mu_1 - \mu_2$ é:

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} - bR, \overline{X} - \overline{Y} + bR\right) \text{ onde: } R = \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{n+m-2}\right)}$$

b é obtido a partir da distribuição t com n+m-2 graus de liberdade tal que $Pr(T > b) = \alpha/2$.

IC aproximado para a probabilidade Binomial

$$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Onde $z_{1-\alpha/2}$ obtido da densidade N(0,1) tal que $Pr(Z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$