



Inferência Estatística

Aula 3

Agosto de 2008

Mônica Barros

monica@mbarros.com

1



Conteúdo – Revisão de Probabilidade

- Algumas das principais distribuições discretas
 - Distribuição de Poisson
 - Distribuição Poisson como aproximação da Binomial
 - Distribuição Binomial Negativa
 - Distribuição Multinomial
 - Modelo Binomial para o Preço de Ações
 - Média e Variância das Principais Distribuições
- Esperança Matemática

monica@mbarros.com

2

Distribuição de Poisson



- Está associada a experiências que modelam o número de ocorrências de um evento dentro de um determinado intervalo de tempo (ou espaço) específico, quando estes eventos ocorrem com uma taxa média conhecida, por exemplo:
 - Número de carros que passam por uma estrada no intervalo de uma hora
 - Número de buracos por km de uma rodovia
 - Número de assassinatos num final de semana
 - Número de defeitos por metro de tecido produzido

monica@mbarros.com

3

Distribuição de Poisson



- Número de erros de digitação numa página de texto
- Número de mutações num trecho de DNA após a exposição a uma certa quantidade de radiação
- Número de soldados mortos por chutes de cavalo a cada ano na cavalaria Prussiana num período de 20 anos. Este exemplo ficou famoso num livro de Bortkiewicz (1868–1931) chamado “Lei dos Números Pequenos”.

monica@mbarros.com

4

Distribuição de Poisson



- Um experimento de Poisson possui as seguintes características:
 - A probabilidade de uma ocorrência é a mesma para dois intervalos de igual comprimento (ou duração);
 - A ocorrência (ou não ocorrência) num determinado intervalo é independente da ocorrência ou não ocorrência em um outro intervalo.
- A distribuição foi descoberta por **Siméon-Denis Poisson (1781–1840)** e publicada em 1838 em seu trabalho “Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile” (Wikipedia).

Distribuição de Poisson



- A função de probabilidade para uma variável Poisson com parâmetro μ é:

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad \text{onde } x = 0, 1, 2, \dots$$

- Este parâmetro μ é a **MÉDIA** da distribuição e indica o número esperado de ocorrências num dado intervalo.
- A distribuição Poisson é freqüentemente utilizada na modelagem de **eventos “raros”**, ou seja, a probabilidade de $X = 0$ ou $X = 1$ (pequeno número de ocorrências no intervalo de tempo especificado) é grande.

Distribuição Poisson



- A distribuição de Poisson não está diretamente relacionada às tentativas de Bernoulli. Esta função de probabilidade é *usada principalmente para modelar o número de ocorrências de um evento “raro” (de probabilidade baixa) durante um intervalo de tempo especificado.*
- Por exemplo, o número de acidentes numa estrada durante um fim de semana, o número de bactérias presentes numa solução após um certo período são, entre outros, eventos modelados pela distribuição de Poisson.

Distribuição Poisson



- Além disso, a distribuição de Poisson surge como um **caso limite da distribuição Bin(n,p)** quando ***n* é grande e *p* é pequeno** (próximo de zero) e, neste contexto, é muito útil em aproximações numéricas. Esta aproximação da Binomial pela Poisson será examinada em maiores detalhes posteriormente.
- Aqui não estaremos preocupados com a derivação da função de probabilidade, e apenas iremos apresentar algumas das suas aplicações.

Distribuição Poisson



- A função de função de probabilidade Poisson com parâmetro $\lambda > 0$ é dada por:

$$\Pr(X = x) = f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \text{ onde } x = 0, 1, 2, \dots$$

- Como usar a função de probabilidade Poisson na prática
- Selecione um intervalo de tempo fixo. Conte o número de ocorrência de um certo evento de interesse neste intervalo. Este número de ocorrências é uma variável discreta com valores possíveis 0, 1, 2,

Distribuição Poisson



- Teorema

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ então:

$$E(X) = \lambda, \text{ VAR}(X) = \lambda \text{ e}$$

$$M(t) = E(e^{tX}) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

- Demonstração parcial
- Usa a série de Taylor para a Exponencial, isto é:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} \right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

Distribuição Poisson



- A média de X é, por definição:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1+1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\ &= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

- Os resultados para o segundo momento e fgm podem ser encontrados de maneira semelhante.

Distribuição Poisson



- Teorema (Propriedade Aditiva da Poisson)
- Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes, e $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$.

- Seja $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
Mas por que mesmo eu vivo me preocupando com esta estória de soma de variáveis aleatórias????
- Então Y tem função de probabilidade Poisson com parâmetro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

Distribuição de Poisson no Excel



Valor de X

Parâmetro da função de probabilidade

Argumento lógico

Se FALSO fornece a função de probabilidade f(x)

monica@mbarros.com

13

Distribuição de Poisson



- Exemplo
- O número médio de clientes que entram em um banco num período de 15 minutos é 10.
- Qual a probabilidade de entrarem exatamente 5 clientes em 15 minutos?

$$\mu = 10; \quad x = 5$$

$$f(5) = \Pr(X = 5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!} = 0.0378$$

monica@mbarros.com

14

Distribuição de Poisson



- Qual a probabilidade de entrarem menos de 3 clientes no banco num intervalo de 5 minutos?
- Note que agora $\mu = 10/3$ pois o intervalo de tempo foi reduzido a 1/3 do original (passou de 15 para 5 minutos). A pergunta é: qual a $\Pr(X < 3)$ usando esta nova distribuição de Poisson.

monica@mbarros.com

15

Distribuição de Poisson



- Usando o Excel (lembrando que a distribuição indicada é agora Poisson(10/3):

x	Prob
0	0.0357
1	0.1189
2	0.1982
Pr(X<3)	0.3528

- Função Poisson do Excel com argumentos 0, 10/3 e FALSO

- soma das probabilidades de $X = 0, 1$ e 2

monica@mbarros.com

16

Distribuição de Poisson



Exemplo

Numa campanha de caridade feita por um programa de TV em todo o Brasil, o número de pessoas que contribuem mais de 500 reais é uma variável aleatória com média de 5 pessoas por programa.

- Calcule a probabilidade de que, num certo programa, o número de pessoas que contribuem mais de 500 reais exceda 8.
- Faça o gráfico da função de probabilidade.
- Faça um gráfico da função de distribuição acumulada.

Distribuição de Poisson



Solução

Seja X o número de pessoas que contribuem com mais de 500 reais a cada programa. Desejamos calcular $\Pr\{X > 8\}$.

$$\Pr\{X > 8\} = 1 - \Pr\{X \leq 8\} = 1 - F(8)$$

onde $F(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada.

A tabela a seguir apresenta a função de probabilidade, a função de distribuição acumulada e seu complemento.

Da tabela segue que $\Pr(X > 8) = 6.81\%$.

Distribuição Poisson

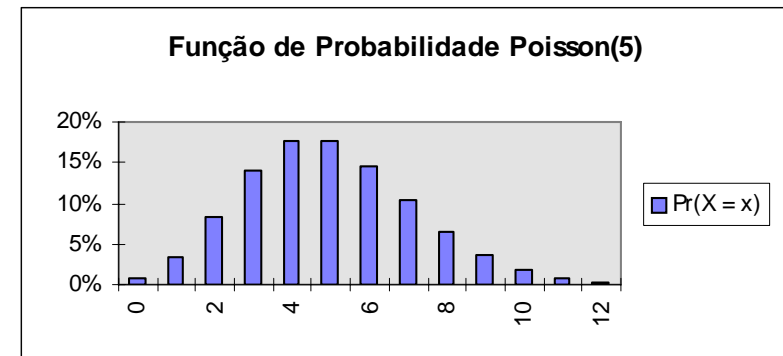


x	Pr(X = x)	Pr(X ≤ x)	1 - F(x) = Pr(X > x)
0	0.67%	0.67%	99.33%
1	3.37%	4.04%	95.96%
2	8.42%	12.47%	87.53%
3	14.04%	26.50%	73.50%
4	17.55%	44.05%	55.95%
5	17.55%	61.60%	38.40%
6	14.62%	76.22%	23.78%
7	10.44%	86.66%	13.34%
8	6.53%	93.19%	6.81%
9	3.63%	96.82%	3.18%
10	1.81%	98.63%	1.37%
11	0.82%	99.45%	0.55%
12	0.34%	99.80%	0.20%

Distribuição de Poisson



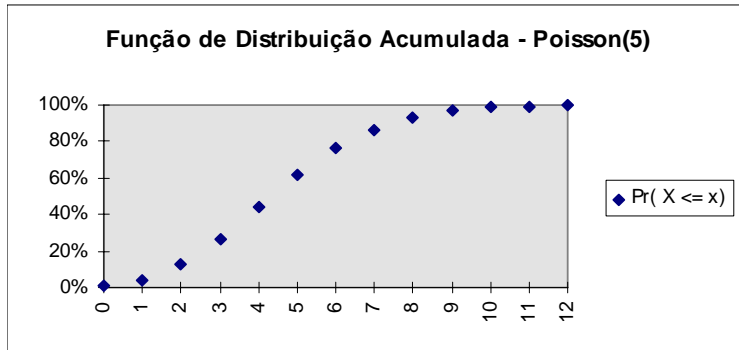
b) A função de probabilidade é dada no gráfico abaixo



Distribuição de Poisson



c) A função de distribuição acumulada é mostrada a seguir.



monica@mbarros.com

21

Exemplo (para casa – use o Excel)



- ❑ O número de enchentes em cada verão no Rio de Janeiro é uma variável aleatória Poisson com média de 1.6 enchentes por verão.
 - ❑ Calcule a probabilidade de ocorrerem exatamente 3 enchentes em um verão qualquer.
 - ❑ Calcule a probabilidade de ocorrerem menos de 28 enchentes em 15 verões.

monica@mbarros.com

22

Exemplo (para casa – use o Excel)



- ❑ O número de carros que chegam num posto de pedágio é uma variável Poisson com parâmetro 2.8 carros por minuto.
- ❑ Use o Excel para calcular:
 - ❑ A probabilidade de passarem mais de 4 carros num minuto.
 - ❑ A probabilidade de passarem menos de 25 carros em 10 minutos.

monica@mbarros.com

23

Exemplo (para casa – use o Excel)



- ❑ O número médio de pedidos de autorização para um certo exame médico complexo recebido por um plano de saúde é uma variável Poisson com parâmetro $\lambda = 4.2$ pedidos por hora.
 - ❑ Calcule a probabilidade de, numa hora qualquer, a empresa receber mais de 5 pedidos de autorização para este exame.
 - ❑ Calcule a probabilidade da empresa receberem, em uma hora, 7 ou menos pedidos de autorização.

monica@mbarros.com

24

Distribuição Poisson – para casa



- ❑ O número de erros de digitação numa página de livro é uma variável aleatória Poisson com média de 2 erros por página. Um capítulo contém 30 páginas. Calcule as seguintes probabilidades:
- ❑ a) De que o número total de erros seja menor que 12.
- ❑ b) De que o número total de erros exceda 10.

Distribuição Poisson como Aproximação da Binomial



- ❑ Seja $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Se n é grande e p está próximo de zero então podemos calcular aproximadamente probabilidades para valores de X usando a distribuição Poisson com parâmetro $\lambda = n.p$.
- ❑ A demonstração deste fato está além dos objetivos deste curso, e pode ser feita considerando-se o limite da função geradora de momentos da Binomial quando n tende a infinito e p tender a zero simultaneamente, de tal forma que o produto $n.p$ seja mantido fixo.

Distribuição Poisson como Aproximação da Binomial - Exemplo



- ❑ Suponha que $X \sim \text{Bin}(n,p)$ onde n é "grande" e p é "pequeno".
- ❑ Então X é aproximadamente Poisson com parâmetro $= n.p$.
- ❑ Note que esta aproximação usa uma Poisson com a **MESMA MÉDIA** que a da Binomial.
- ❑ Num caso específico, seja $n = 25$ e $p = 0.1$.
- ❑ A seguir comparamos as probabilidades de $X = 0, 1, 2, \dots, 4$ para os modelos $\text{Bin}(25, 0.1)$ e $\text{Poisson}(2.5)$. A última coluna da tabela representa a diferença percentual entre as probabilidades calculadas segundo os dois modelos.

Distribuição Poisson como Aproximação da Binomial - Exemplo



x	Pr(X = x) via função de probabilidade Bin(25, 0.1)	Pr(X = x) via função de probabilidade Poisson (2.5)	diferença percentual
0	0.0718	0.0821	-14.34
1	0.1994	0.2052	-2.91
2	0.2659	0.2565	3.53
3	0.2265	0.2138	5.62
4	0.1384	0.1336	3.48

Os valores estão bastante próximos em todos os casos. A diferença percentual é grande quando $x = 0$ por que o valor da probabilidade é muito pequeno.

Distribuição Poisson como Aproximação da Binomial (para casa)



- O número de afogamentos fatais na praia em cada fim de semana de sol no Rio de Janeiro é uma variável aleatória.
- Toma-se um período de 50 fins de semana ensolarados, e estamos interessados na variável X que representa o número total de fins de semana em que houve afogamentos fatais dentre estes 50 fins de semana.
- Suponha que a ocorrência de um afogamento fatal num fim de semana não afeta a probabilidade de ocorrência de outros afogamentos fatais, e que a probabilidade de um afogamento fatal num fim de semana qualquer é 1%.

monica@mbarros.com

29

Distribuição Poisson como Aproximação da Binomial (para casa)



- Qual a função de probabilidade de X ?
- a) Calcule a probabilidade de ocorrerem menos de 3 fins de semana em que ocorreram afogamentos fatais dentre estes 50 finais de semana ensolarados.
- b) Aproxime a probabilidade do item a) usando uma distribuição de Poisson apropriada. Qual o erro percentual absoluto desta aproximação. Defina o erro percentual absoluto como:

$$\text{Erro} = \frac{100|\text{prob. real} - \text{prob. aproximada}|}{\text{prob. real}}$$

monica@mbarros.com

30

Distribuição Binomial Negativa



- A distribuição Binomial negativa é mais uma função de probabilidade derivadas de tentativas de Bernoulli independentes e é uma **generalização da distribuição Geométrica**.
- Suponha que *repetimos um número indefinido de vezes* uma experiência que resulta em sucesso ou falha. **As repetições terminam quando encontramos o r -ésimo sucesso**, onde r é um número especificado a priori.

monica@mbarros.com

31

Distribuição Binomial Negativa



- Seja X a variável aleatória que representa a tentativa onde o r -ésimo sucesso ocorre. Então a função de probabilidade de X é:

$$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{x-r} \quad \text{onde } x = r, r+1, r+2, \dots$$

- Note que o valor mínimo de X é r , pois precisamos fazer pelo menos r repetições para encontrar r sucessos! Também, a combinação que aparece na densidade indica que, das $x-1$ repetições anteriores à última (que é necessariamente um “sucesso”, $r-1$ são “sucessos”).

monica@mbarros.com

32

Distribuição Binomial Negativa



- Também, $p^r \cdot q^{x-r}$ é a probabilidade de uma seqüência qualquer contendo r “sucessos” e $x-r$ “falhas”.
- Se $X \sim \text{NegBin}(r, p)$, sua média, variância e fgm são dadas por:

$$\begin{aligned} E(X) &= r/p \\ \text{VAR}(X) &= rq/p^2 \\ M(t) &= \left(\frac{pe^t}{1-qe^t} \right)^r \end{aligned}$$

- **Nota – a função de probabilidade $\text{NegBin}(r=1, p)$ é apenas a Geométrica.**

Distribuição Binomial Negativa - Exemplo



- Um comprador em potencial entra numa loja de carros a cada hora.
- Um vendedor tem probabilidade 0.25 de concluir uma venda. O vendedor decide trabalhar até conseguir vender 3 carros num só dia.
- Qual a probabilidade de que o vendedor tenha de trabalhar exatamente 8 horas para conseguir vender os 3 carros? E mais de 8 horas?

Distribuição Binomial Negativa - Exemplo



- Seja X o número de horas de trabalho necessárias para vender 3 carros.
- Então X tem distribuição Binomial Negativa com parâmetros $r = 3$ e $p = 0.25$.

$$\Pr(X = x) = \binom{x-1}{2} (0.25)^3 \cdot (0.75)^{x-3} \text{ para } x = 3, 4, 5, \dots$$

- A próxima tabela exhibe os valores das probabilidades para $X = 3, 4, \dots, 8$.

Distribuição Binomial Negativa - Exemplo



x	Pr(X = x)
3	0.01563
4	0.03516
5	0.05273
6	0.06592
7	0.07416
8	0.07787

A probabilidade de trabalhar exatamente 8 horas é $\Pr(X = 8) = 0.07787$. A probabilidade de trabalhar mais de 8 horas é:

$$\begin{aligned} \Pr(X > 8) &= 1 - \Pr(X \leq 8) = 1 - \{\Pr(X = 3) + \Pr(X = 4) + \dots + \Pr(X = 8)\} = \\ &= 1 - \{0.01563 + 0.03516 + \dots + 0.07787\} = 1 - 0.32146 = 0.67854 \end{aligned}$$

Distribuição Binomial Negativa - Exemplo



- Uma fábrica de sorvetes decidiu fazer uma campanha para aumentar suas vendas.
- A cada 50 sorvetes produzidos um é premiado, e o prêmio consiste em ganhar um outro sorvete grátis. Cada sorvete é vendido por R\$ 0.80.
- a) Se você decide comprar sorvetes até encontrar um sorvete premiado, quanto você espera gastar?
- b) E se você comprar sorvetes até encontrar o 2o. sorvete premiado?

Distribuição Binomial Negativa - Exemplo



- a) Seja X o número de sorvetes comprados até encontrar o 1o. sorvete premiado. Então X tem distribuição Geométrica com parâmetro $p = 1/50$. Seja C o custo deste procedimento. Então $C = 0.8X$ e $E(C) = 0.8.E(X)$. Mas, $E(X) = 1/p = 50$ e assim o custo esperado é de R\$40.
- b) Neste caso X mede o número de sorvetes comprados até encontrar o 2o. sorvete premiado. Então X tem distribuição Binomial Negativa com $r = 2$ e $p = 1/50$. Agora $E(C) = 0.8E(X) = 0.8(2)(50) = R\$ 80$.

Distribuição Binomial Negativa – para casa



- Uma gulosa professora de estatística é “fissurada” por trufas de chocolate. Em busca da trufa ideal, ela vai provando chocolates em diversas lojas, de maneira independente.
- A probabilidade dela gostar de uma trufa que prova é 70%. Ela decide passear por um shopping, provando todas as trufas que encontra, e decide parar só ao encontrar a 4ª. trufa “maravilhosa”(para “desespero” da balança que tem em casa!).

Distribuição Binomial Negativa – para casa



- Qual a probabilidade dela ter que:
 - a) Provar 6 trufas até encontrar a 4ª. trufa maravilhosa?
 - b) Ter que “sofrer”, provando 10 trufas, até encontrar a 4ª. trufa maravilhosa?

Distribuição Multinomial



- A distribuição Multinomial é uma **extensão da distribuição Binomial** quando existem mais que dois resultados possíveis.
- Considere uma experiência com espaço amostral S onde existem k resultados possíveis $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$.
- Estes resultados são mutuamente exclusivos, e se B_i ocorre, nenhum outro B_j ocorreu.

Distribuição Multinomial



- Suponha que a experiência é repetida n vezes nas mesmas condições, e seja $p_i = \Pr(B_i)$. Suponha que p_i é constante para todo i ($i = 1, 2, 3, \dots, k$) em todas as n repetições da experiência.
- Seja X_i a variável aleatória que representa o número de vezes em que o evento B_i ocorreu nas n repetições da experiência. Então, as variáveis X_1, X_2, \dots, X_k satisfazem a relação:
$$X_1 + X_2 + \dots + X_k = n$$
- Os X_i 's **não são** independentes.

Distribuição Multinomial



- A função de probabilidade conjunta dos X_i 's tem a forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

- Esta é a distribuição Multinomial com parâmetros n, p_1, p_2, \dots, p_k .
- As seguintes restrições devem ser satisfeitas: $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ e

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$$

Distribuição Multinomial



- Note que a partir destas últimas expressões podemos escrever qualquer X_i e qualquer p_i em termos dos outros X 's (ou p 's).
- Se $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$ têm distribuição Multinomial com parâmetros n, p_1, p_2, \dots, p_k então:
$$E(X_i) = n \cdot p_i$$
 e
$$\text{VAR}(X_i) = n \cdot p_i \cdot (1 - p_i)$$
 para $i = 1, 2, \dots, k$
$$\text{COV}(X_i, X_j) = -n \cdot p_i \cdot p_j$$
 para $i \neq j$

Distribuição Multinomial



- A distribuição Binomial é um caso particular da distribuição Multinomial quando existem apenas $k = 2$ resultados possíveis da experiência.
- Neste caso, X_1 indica o número de "sucessos" nas n repetições da experiência, enquanto $X_2 = n - X_1$ é o número de "falhas" dentre as n repetições. A função de probabilidade conjunta de X_1 e X_2 é:

$$\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \Pr(X_1 = x_1, n - X_1 = n - x_1) = \frac{n!}{x_1!x_2!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} =$$
$$= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} \cdot p_1^{x_1} \cdot (1-p_1)^{n-x_1} = \binom{n}{x_1} \cdot p_1^{x_1} \cdot (1-p_1)^{n-x_1}$$

monica@mbarros.com

45

Distribuição Multinomial - Exemplo



- Os seguintes eventos podem acontecer com um pacote enviado pelo correio: chegar em perfeito estado, chegar danificado, perder-se pelo caminho.
- As probabilidades destes acontecimentos são, respectivamente, 0.7, 0.2 e 0.1.
- Sua secretária enviou recentemente 10 pacotes pelo correio. Qual a probabilidade de que 6 chegaram corretamente ao destino, 2 foram perdidos e os outros 2 avariados?

monica@mbarros.com

46

Distribuição Multinomial - Exemplo



- Defina as seguintes variáveis aleatórias:
- X_1 = número de pacotes que chegaram corretamente e sem danos
- X_2 = número de pacotes que chegaram avariados
- X_3 = número de pacotes que se perderam pelo caminho
- Então: $X_1 + X_2 + X_3 = n = 10$ e $p_1 + p_2 + p_3 = 0.7 + 0.2 + 0.1 = 1$

$$\Pr(X_1 = 6, X_2 = 2, X_3 = 2) = \frac{10!}{6!2!2!} \cdot (0.7)^6 \cdot (0.2)^2 \cdot (0.1)^2 = 0.059$$

monica@mbarros.com

47

Distribuição Multinomial – para casa (exercício 1)



- Os funcionários numa empresa pertencem a 4 categorias distintas (e mutuamente exclusivas): engenheiros, economistas, advogados e administradores. As probabilidades de um funcionário estar em cada uma destas categorias são, respectivamente, 45%, 35%, 15% e 5%.
- Numa festa de final de ano da empresa estão 30 pessoas. Calcule as seguintes probabilidades:
- De que exatamente 12 sejam engenheiros, 12 economistas, 5 advogados e 1 administrador.
- De que exatamente 12 sejam engenheiros e 12 economistas.
- De que existam mais de 2 advogados na festa.

monica@mbarros.com

48

Distribuição Multinomial – para casa (exercício 2)



- Numa agência bancária, 10% dos clientes classificam o atendimento como “ótimo”, 25% o consideram “bom”, 35% acham que o atendimento é “regular” e o restante pensa que o atendimento é “ruim ou péssimo”.
- O banco decide implantar um programa de qualidade, e como parte deste esforço, faz uma pesquisa sobre a qualidade dos serviços nesta agência. Toma-se uma amostra de 30 clientes da agência. Calcule as seguintes probabilidades:

monica@mbarros.com

49

Distribuição Multinomial – para casa (exercício 2)



- a) De que o número de pessoas que classificam os serviços como “ótimo”, “bom”, “regular” e “ruim ou péssimo” é, respectivamente, 4, 8, 8, 10.
- b) De que o número de pessoas que classificam os serviços como “ótimo” e “bom” é maior que 20.
- c) De que o número de pessoas que classificam os serviços como “ruim ou péssimo” é menor que 5.

monica@mbarros.com

50

Distribuição Multinomial – para casa (exercício 3)



- Os engenheiros de uma empresa se formaram nas seguintes universidades: PUC, UFRJ, UERJ e IME. As probabilidades deles terem se formado em cada uma destas universidades são, respectivamente: 50%, 30%, 15%, 5%.
- Num certo andar da empresa estão 25 engenheiros.
- Calcule as seguintes probabilidades:
 - a) De que exatamente 13 tenham se formado na PUC, 7 na UFRJ e 3 na UERJ.
 - b) De que exatamente 13 tenham se formado na PUC e 7 na UFRJ.
 - c) De que existam mais de 20 engenheiros formados pela PUC neste andar.

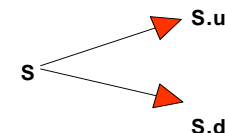
monica@mbarros.com

51

Modelo Binomial para Preço de Ações



- Seja S o preço de um ativo no instante $t = 1$. No instante seguinte, o preço pode subir para um valor $S.u$ com probabilidade p ou descer para o valor $S.d$ com probabilidade $q = 1 - p$.
- Note que u é um número maior que 1, enquanto d é um número entre 0 e 1.



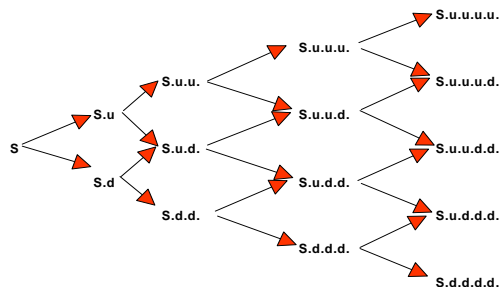
monica@mbarros.com

52

Modelo Binomial para Preço de Ações



- A evolução dos preços no tempo segue este mesmo comportamento (subir com probabilidade p ou descer com probabilidade q). Assim, após 4 instantes de tempo os valores possíveis do preço são:



monica@mbarros.com

53

Modelo Binomial para Preço de Ações



- As variáveis u , d e p devem ser escolhidas de tal forma que, para um intervalo de tempo pequeno Δt , o retorno esperado do ativo é $\mu \cdot \Delta t$ e a variância do retorno é $\sigma^2 \cdot \Delta t$, onde o retorno num intervalo de tempo Δt é definido por: $\log\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)$

onde $S_{t+\Delta t}$ é o preço no instante $t + \Delta t$ e S_t é o preço no instante t .

- Supondo a evolução mostrada anteriormente, $S_{t+\Delta t} = S \cdot u$ ou $S_{t+\Delta t} = S \cdot d$ e $S_t = S$. Logo, o retorno após um intervalo de tempo Δt é $\log(u)$ ou $\log(d)$. Se a média dos retornos for, como indicado, $\mu \cdot \Delta t$ então o preço médio após Δt instantes será $S \cdot \exp\{\mu \cdot \Delta t\}$.

monica@mbarros.com

54

Modelo Binomial para Preço de Ações



- Possíveis escolhas para u , d e p são:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = \frac{1}{u} \quad p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}$$

- Note que estas escolhas não são únicas.
- Este modelo é bastante usado na prática em Finanças, e uma das suas vantagens é sua simplicidade, até porque pode-se reduzir ainda mais o intervalo de tempo Δt .

monica@mbarros.com

55

Modelo Binomial para Preço de Ações



- Considere uma ação que tem, no instante $t = 0$, o preço de R\$ 100.
- A cada intervalo de tempo tempo, a ação pode subir R\$ 0.25 com probabilidade p ou descer R\$ 0.25 com probabilidade $q = 1 - p$.
- a) Faça um desenho da árvore binomial com os preços até o instante $t = 7$.
- b) Escreva a função de probabilidade dos preços em $t = 7$.

monica@mbarros.com

56

Modelo Binomial para Preço de Ações



□ A árvore Binomial até o instante $t = 7$ é:

t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7
						101.50	101.75
					101.25	101.00	101.25
			100.75	101.00	100.75	101.00	100.75
	100.25	100.50	100.25	100.50	100.25	100.50	100.25
100.00	99.75	100.00	99.75	100.00	99.75	100.00	99.75
		99.50	99.25	99.50	99.25	99.50	99.25
			99.00	99.25	99.00	99.25	99.00
				98.75	98.50	98.75	98.50
					98.50	98.25	98.50

monica@mbarros.com

57

Modelo Binomial para Preço de Ações



□ Seja X o preço em $t = 7$. A sua função de probabilidade é:

x	Pr(X = x)
98.25	$\frac{q^7}{p^7}$
98.75	$\frac{7pq^6}{p^7}$
99.25	$\binom{7}{2} p^2 q^5 = 21 p^2 q^5$
99.75	$\binom{7}{3} p^3 q^4 = 35 p^3 q^4$
100.25	$\binom{7}{4} p^4 q^3 = 35 p^4 q^3$
100.75	$\binom{7}{5} p^5 q^2 = 21 p^5 q^2$
101.25	$\frac{7p^6q}{p^7}$
101.75	$\frac{p^7}{p^7}$

monica@mbarros.com

58

Esperança matemática



□ Momentos

□ Servem para caracterizar uma distribuição de probabilidade ou uma amostra.

□ Aqui estaremos interessados apenas nos momentos da distribuição (e não nos momentos amostrais).

monica@mbarros.com

59

Esperança matemática



□ Definição (k-ésimo momento)

□ O k-ésimo momento de X , ou k-ésimo momento da distribuição de X , denotado por $E(X^k)$ é definido por:

$$E(X^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} x^k \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} x^k \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

□ Acima k é um inteiro maior ou igual a zero. Em particular, se $k = 0$, $E(X^0) = E(1) = 1$.

monica@mbarros.com

60

Esperança matemática



- **Definição (média ou valor esperado)**
- A **média** (ou **valor esperado** ou **primeiro momento**) de uma variável aleatória é definida como:

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} x \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} x \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

- A média de uma variável aleatória é uma medida de tendência central da distribuição de probabilidade desta variável aleatória.

Esperança matemática



- Podemos combinar a definição do **k-ésimo momento** e a definição da média para produzir o **k-ésimo momento central**, como a seguir:

$$E((X - \mu)^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^k \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^k \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

- Em particular, se **k = 1**: **$E(X - \mu) = 0$** , ou seja, o **primeiro momento central é sempre nulo**.

Esperança matemática



- Se **k = 1** então:

$$\begin{aligned} E(X - \mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx - \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx - \mu(1) = \\ &= \mu - \mu = 0 \end{aligned}$$

- (Idem para o caso discreto)

Esperança matemática



- **Definição (Variância)**
- A **variância** de uma variável aleatória mede a dispersão da distribuição de probabilidade, e é definida como o **2o. momento central**:

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E((X - \mu)^2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ discreta} \end{cases}$$

Esperança matemática



- Onde novamente $f(x)$ representa a densidade de probabilidade (se X contínua) ou a função de probabilidade (se x é discreta) e μ é a média da variável aleatória.
- A variância é o segundo momento em torno da média, e corresponde ao momento de inércia em Mecânica.

□ Da própria definição segue que **a variância é uma quantidade sempre maior ou igual a zero.**

Esperança matemática



□ Definição (desvio padrão)

- O **desvio padrão** de uma variável aleatória é a **raiz quadrada positiva da sua variância**, e denotado por σ , isto é:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\text{VAR}(X)}$$

- O **desvio padrão** é expresso nas **mesmas unidades que a variável aleatória**, e a variância é dada nas unidades da variável aleatória ao quadrado.

Esperança matemática



- Se o **desvio padrão é pequeno** existe **pouca dispersão** em torno da média. Se ele é **grande**, os valores da variável aleatória estão **muito dispersos** em torno da média.
- A média e a variância são casos particulares dos momentos de uma distribuição de probabilidade.

Esperança matemática



- Os momentos de uma distribuição servem para caracterizar esta distribuição, não apenas no que se refere à sua centralidade e dispersão, mas também com relação a outras características, como a simetria ou assimetria da densidade de probabilidade.
- A notação $E(\dots)$ indica o **valor esperado** (ou “esperança”, ou “expectância”), e pode ser estendida para funções mais gerais que X^k ou $(X - \mu)^k$.

Esperança matemática



- Definição (valor esperado de uma função de uma variável aleatória)
- Seja X uma variável aleatória com densidade $f(x)$ e seja $u(X)$ uma função qualquer tal que as integrais ou somatórios mostrados a seguir existem.
- O valor esperado (ou esperança matemática) de $u(X)$ é:

$$E(u(X)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} u(x) \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} u(x) \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Esperança matemática



- Note que $u(X)$ é também uma v.a.!
- A definição anterior inclui, como casos particulares, as definições do k -ésimo momento, média e variância.
- O próximo teorema é útil na manipulação de combinações lineares de v.a. (ou suas funções).

Esperança matemática



- Teorema (Linearidade do valor esperado)
- Sejam a e b constantes e u , v funções quaisquer de X com valores esperados finitos. Então:

$$E[a \cdot u(X) + b \cdot v(X)] = a E[u(X)] + b E[v(X)]$$

Esperança matemática



- A demonstração deste fato segue diretamente da linearidade das integrais ou somatórios. Em particular, se a é uma constante, $E(a) = a$.
- Nota: fórmula alternativa para o cálculo da variância
- O cálculo da variância através da definição é, às vezes, bastante trabalhoso. Por exemplo, no caso de uma v.a. discreta, é necessário computar todas as diferenças $x_i - \mu$, elevá-las ao quadrado e multiplicá-las pela probabilidade de ocorrência de cada x_i .
- Logo, seria interessante encontrar uma fórmula alternativa (e mais fácil) para o cálculo da variância, e isso pode ser feito empregando-se a linearidade do valor esperado.

Esperança matemática



- Fórmula Alternativa para o Cálculo da Variância

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E[(X - \mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$

- Pela linearidade do valor esperado e notando que μ é uma constante:

$$\sigma^2 = E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2)$$

- Mas, por definição: $\mu = E(X)$ e μ é uma constante, daí $E(\mu^2) = \mu^2$. Logo:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \\ \sigma^2 &= E(X^2) - \{E(X)\}^2\end{aligned}$$

- Esta fórmula é válida para qualquer variável aleatória X (contínua ou discreta), desde que a média de X seja finita.

monica@mbarros.com

73

Esperança matemática



- Propriedades do valor esperado e da variância de funções lineares

- Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer. Então:

1-) $E(aX + b) = aE(X) + b$

2-) $E(a) = a$

3-) $\text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X)$

4-) $\text{VAR}(a) = 0$

monica@mbarros.com

74

Esperança matemática



- Exemplo

- O retorno mensal de certo investimento de risco pode ser modelado pela variável aleatória R com função de probabilidade dada a seguir:

r	-5 %	0 %	5 %	10 %	15 %
$\text{Pr}(R = r)$	0.40	0.15	0.25	0.15	0.05

- Calcule o retorno esperado (em %) do investimento e sua variância e desvio padrão.

- Solução

- A variável R é discreta, e sua média é (pela definição):

monica@mbarros.com

75

Esperança matemática



- $\mu = (-5)(0.40) + (0)(0.15) + (5)(0.25) + (10)(0.15) + (15)(0.05) = 1.5$

- A variância de R é:

- $\sigma^2 = (-5-1.5)^2(0.40) + (0-1.5)^2(0.15) + (5-1.5)^2(0.25) + (10-1.5)^2(0.15) + (15-1.5)^2(0.05) = 40.25$

- O desvio padrão de R é:

- $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 6.344$ (em porcentagem, que é a unidade em que estão expressos os retornos)

monica@mbarros.com

76

Esperança matemática – exemplo (para casa)



Seja X uma variável aleatória contínua com densidade $f(x) = cx$ onde $0 < x < 3$.

- Ache a constante c que faz de $f(x)$ uma densidade.
- Encontre a função de distribuição de X .
- Ache a média, a variância e o desvio padrão de X .
- Encontre um ponto m no intervalo $(0,3)$ tal que $\Pr(X \geq m) = \Pr(X \leq m) = 50\%$. Este ponto é a *mediana* da distribuição.

Esperança matemática – exemplo (para casa)



- Considere uma v.a. contínua com densidade Uniforme(a,b), isto é:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ se } a < x < b$$

- Mostre que $E(X) = (a+b)/2$
- Mostre que $VAR(X) = (b-a)^2/12$

Média e Variância das Principais Distribuições



Distribuição	Média	Variância
Bernoulli(p)	p	$p \cdot q$
Binomial (n,p)	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot q$
Geométrica(p)	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Poisson(μ)	μ	μ
Hipergeométrica (N, n, r)	$E(X) = n \cdot \left(\frac{r}{N}\right)$	$VAR(X) = n \cdot \left(\frac{r}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{N}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
Uniforme(a,b)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial (λ)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$