

IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2008.01

Teste 1 – 10/04/2008

NOME: _____

FOLHA DE RESPOSTAS – PREENCHA A CANETA E NÃO RASURE!!!

Em cada um dos problemas, marque a resposta que você acha certa e depois transcreva para a folha de respostas. O formulário está no final da prova.

PROBLEMA 1 (25 pontos)

Item A	<input type="checkbox"/>
Item B	<input type="checkbox"/>
Item C	<input type="checkbox"/>

PROBLEMA 2 (25 pontos)

Item A	<input type="checkbox"/>
Item B	<input type="checkbox"/>
Item C	<input type="checkbox"/>
Item D	<input type="checkbox"/>
Item E	<input type="checkbox"/>

PROBLEMA 3 (25 pontos)

Item A	<input type="checkbox"/>
Item B	<input type="checkbox"/>
Item C	<input type="checkbox"/>
Item D	<input type="checkbox"/>
Item E	<input type="checkbox"/>

PROBLEMA 4 (25 pontos)

Item A	<input type="checkbox"/>
Item B	<input type="checkbox"/>

Problema 1

Os cursos de Engenharia foram classificados em 4 categorias distintas (e mutuamente exclusivas): A, B, C, D. As probabilidades de um curso estar em cada uma destas categorias são, respectivamente, 10%, 25%, 35% e 30%.

Num certo Estado do país existem 20 cursos de engenharia.

Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que exatamente 2 sejam nível A, 5 nível B e 6 de nível C.

A	B	C	D
0.2200	0.0110	0.0055	NDA

b) De que exatamente 2 sejam de nível A e 5 de nível B.

A	B	C	D
0.0588	0.1176	0.2200	NDA

c) De que existam menos de 3 cursos de nível A dentre os 20 neste Estado.

A	B	C	D
0.5554	0.6769	0.3918	NDA

Problema 2

Toda manhã você tem que passar por um certo sinal de trânsito bastante demorado. Suponha que a probabilidade do sinal estar aberto é 0.30 e que cada manhã representa uma repetição independente.

a) Numa seqüência de 5 manhãs, qual a probabilidade de você encontrar o sinal aberto em exatamente uma manhã?

A	B	C	D
0.1681	0.5282	0.3602	NDA

b) Numa seqüência de 15 manhãs, qual a probabilidade de você encontrar o sinal aberto em mais de 4 manhãs?

A	B	C	D
0.5155	0.4845	0.4893	NDA

c) Qual a probabilidade de você demorar até a 4ª manhã consecutiva para encontrar o sinal aberto pela 1ª vez?

A	B	C	D
0.0720	0.1029	0.1470	NDA

d) Qual a probabilidade de que o sinal esteja fechado por 10 manhãs consecutivas?

A	B	C	D
0.0282	0.0576	0.0720	NDA

e) Em média, quantas manhãs você vai passar pelo sinal até encontrá-lo aberto pela primeira vez?

A	B	C	D
3.3333	6.6667	5	NDA

PROBLEMA 3

A probabilidade de uma pessoa entrar numa loja e comprar um certo produto é uma variável aleatória **contínua** X com densidade $f(x) = k \cdot x^2 \cdot (1-x)$, onde $0 < x < 1$.

a) A constante k que faz desta expressão uma densidade é:

A	B	C	D
6	2	12	NDA

b) A função de distribuição de X em $x = 1/2$ é:

A	B	C	D
1/2	1/4	5/16	NDA

c) A probabilidade de X estar no intervalo $(0, 1/4)$ é:

A	B	C	D
Maior que a prob. de X estar no intervalo $(0, 1/2)$	Maior que a prob. de X estar no intervalo $(3/4, 1)$	Menor que a prob. de X estar no intervalo $(3/4, 1)$	NDA

d) A media da densidade é:

A	B	C	D
0.6	0.4	0.5	NDA

e) O desvio padrão desta densidade é:

A	B	C	D
0.2	0.1	0.4	NDA

PROBLEMA 4

Um terrorista quer envenenar as pessoas numa festa. Nela, são servidas 50 refeições individuais, das quais 5 estão envenenadas.

Calcule as seguintes probabilidades:

a) De, numa mesa de 8 convidados, pelo menos uma pessoa ser envenenada?

A	B	C	D
0.5985	0.4015	0.4085	NDA

b) De, numa mesa de 7 convidados, mais de uma pessoa ser envenenada?

A	B	C	D
0.1759	0.4543	0.1380	NDA

IND 1115 - Inferência Estatística

Profa. Mônica Barros

FORMULÁRIO P1

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância	fgm
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ se $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Não é útil
Exponencial	$f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x)$ onde $\lambda > 0$ e $x \geq 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)$ se $t < \lambda$
Gama	$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta x}, & \text{onde } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ se $t < \beta$
Qui-Quadrado	$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$	n	2n	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ se $t < 1/2$
Binomial	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$ para $x = 0, 1, 2, \dots, n$	n.p	n.p.q	$(pe^t + q)^n$
Hipergeométrica	$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n \cdot \left(\frac{r}{N}\right)$	$n \cdot \left(\frac{r}{N}\right) \left(1 - \frac{r}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	Não é útil
Geométrica	$f(n) = \Pr(X = n) = (1-p)^{n-1} p$ onde $n = 1, 2, 3, \dots$	$1/p$	q/p^2	$M(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$
Poisson	$\Pr(X = x) = f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$ onde $x = 0, 1, 2, \dots$	λ	λ	$E(e^{tx}) = e^{\lambda \cdot (e^t - 1)}$
Binomial Negativa	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{x-r}$ onde $x = r, r+1, r+2, \dots$	r/p	$r \cdot q/p^2$	$M(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

Resultados Matemáticos

Série Geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{1}{1-a} \text{ desde que } |a| < 1$$

Teorema Binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são número reais e } k, n \text{ são inteiros } \geq 0$$

Série de Taylor da Exponencial

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

Função de Distribuição (F(x))

- 1) $F(x) = \Pr(X \leq x)$
- 2) $0 \leq F(x) \leq 1$
- 3) $F(x)$ é uma função não decrescente
- 4) $\lim F(x) = 1$ se $x \rightarrow +\infty$
- 5) $\lim F(x) = 0$ se $x \rightarrow -\infty$

Se X é uma v.a. contínua, $F(x)$ é contínua. Se X é discreta, $F(x)$ é descontínua

Relação entre densidade e função de distribuição

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Definição: k-ésimo momento

$$E(X^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} x^k \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} x^k \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: Média ou Valor Esperado de X

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} x \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} x \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: k-ésimo momento central

$$E((X - \mu)^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^k \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^k \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Em particular, se $k = 1$: $E(X - \mu) = 0$, ou seja, o primeiro momento central é sempre nulo.

Definição: Variância

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E((X - \mu)^2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ discreta} \end{cases}$$

Fórmula alternativa para o cálculo da variância

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Definição: Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

$$E(u(X)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} u(x) \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} u(x) \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\text{VAR}(X)}$$

Propriedades – Média e Variância de constantes e funções lineares

Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer. Então:

- 1-) $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$
- 2-) $E(a) = a$
- 3-) $\text{VAR}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \text{VAR}(X)$
- 4-) $\text{VAR}(a) = 0$

Propriedade – linearidade do valor esperado:

$$E\{a \cdot u(X) + b \cdot v(X)\} = a \cdot E\{u(X)\} + b \cdot E\{v(X)\}$$

Poisson como aproximação da Binomial

Se X é Binomial(n, p), onde n é grande e p é pequeno ($n > 20$ e $n \cdot p < 5$), pode-se aproximar as probabilidades Binomiais por probabilidades Poisson usando uma Poisson com a mesma média, isto é, usando $\lambda = n \cdot p$.

Função Geradora de Momentos (fgm)

$$M(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} e^{tx} \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} e^{tx} \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Relação entre Momentos e fgm

$$M^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k M(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = E(X^k)$$