IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2008.01
Teste 1 – 10/04/2008
GABARITO

FOLHA DE RESPOSTAS – PREENCHA A CANETA E NÃO RASURE!!!
Em cada um dos problemas, marque a resposta que você acha certa e depois transcreva para a folha de respostas. O formulário está no final da prova.

PROBLEMA 1 (25 pontos)

Item A	B
Item B	A
Item C	B

PROBLEMA 2 (25 pontos)

Item A	C
Item B	B
Item C	B
Item D	A
Item E	A

PROBLEMA 3 (25 pontos)

Item A	C
Item B	C
Item C	C
Item D	A
Item E	A

PROBLEMA 4 (25 pontos)

Item A	A
Item B	C

Problema 1

Os cursos de Engenharia foram classificados em 4 categorias distintas (e mutuamente exclusivas): A, B, C, D. As probabilidades de um curso estar em cada uma destas categorias são, respectivamente, 10%, 25%, 35% e 30%.

Num certo Estado do país existem 20 cursos de engenharia.
Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que exatamente 2 sejam nível A, 5 nível B e 6 de nível C.

A	**B**	C	D
0.2200	**0.0110**	0.0055	NDA

b) De que exatamente 2 sejam de nível A e 5 de nível B.

A	B	C	D
0.0588	0.1176	0.2200	NDA

c) De que existam menos de 3 cursos de nível A dentre os 20 neste Estado.

A	**B**	C	D
0.5554	**0.6769**	0.3918	NDA

Solução

Sejam X_1, X_2, X_3, X_4 o número de cursos de Engenharia no Estado classificados como de nível A, B, C e D respectivamente.

a) $$\Pr(X_1 = 2, X_2 = 5, X_3 = 6, X_4 = 7) = \frac{20!}{2!5!6!7!}(0.10)^2(0.25)^5(0.35)^6(0.30)^7 = 0.01097$$

b) Agora só existem 2 categorias de interesse, A e B, as outras podem ser agrupadas. Seja X_3 o número de cursos de Engenharia em "outras categorias" (diferentes de A ou B). Então X_3 ocorre com probabilidade 0.65.

$$\Pr(X_1 = 2, X_2 = 5, X_3 = 13) = \frac{20!}{2!5!13!}(0.10)^2(0.25)^5(0.65)^{13} = 0.05878$$

c) Agora só existe uma categoria de interesse (cursos de nível A) e todas as outras se reduzem a uma única categoria. A distribuição Multinomial se reduz à Binomial e podemos dizer que X, o número de cursos de Engenharia de nível A no Estado é uma variável Binomial com parâmetros n = 20 e p = 0.1. Desejamos encontrar Pr(X < 3) = Pr(X = 0) + Pr(X =1) + Pr(X = 2).

x	**Pr(X = x)**
0	**0.1216**
1	**0.2702**
2	**0.2852**
Soma	**0.6769**

Logo, Pr(X < 3) = 0.6769

Problema 2

Toda manhã você tem que passar por um certo sinal de trânsito bastante demorado. Suponha que a probabilidade do sinal estar aberto é 0.30 e que cada manhã representa uma repetição independente.

a) Numa seqüência de 5 manhãs, qual a probabilidade de você encontrar o sinal aberto em exatamente uma manhã?

A	B	**C**	D
0.1681	0.5282	**0.3602**	NDA

b) Numa seqüência de 15 manhãs, qual a probabilidade de você encontrar o sinal aberto em mais de 4 manhãs?

A	**B**	C	D
0.5155	**0.4845**	0.4893	NDA

c) Qual a probabilidade de você demorar até a 4ª manhã consecutiva para encontrar o sinal aberto pela 1ª vez?

A	**B**	C	D
0.0720	**0.1029**	0.1470	NDA

d) Qual a probabilidade de que o sinal esteja fechado por 10 manhãs consecutivas?

A	B	C	D
0.0282	0.0576	0.0720	NDA

e) Em média, quantas manhãs você vai passar pelo sinal até encontrá-lo aberto pela primeira vez?

A	B	C	D
3.3333	6.6667	5	NDA

Solução

O sinal aberto pode ser encarado como um "sucesso" com probabilidade p = 0.30 e o sinal fechado é uma "falha" com probabilidade 1-p = q= 0.70.

No item a) você faz exatamente 5 repetições, ou seja, passa exatamente 5 vezes pelo sinal, a variável X que mede o número de vezes em que encontra o sinal aberto nestas 5 repetições é Binomial com n = 5 e p = 0.3.

$\Pr(X = 1) = 5(0.3)^1(0.7)^4 = \mathbf{0.3602}$

No item b) temos agora uma variável Binomial, mas com n = 15 e p = 0.3.
$\Pr(X > 4) = \Pr(X = 5) + \Pr(X = 6) + \ldots + \Pr(X=15) = 1 – \Pr(X = 0) – \Pr(X=1) - \ldots – \Pr(X=4) =$ **0.4845**

x	prob
0	0.0047
1	0.0305
2	0.0916
3	0.1700
4	0.2186
soma	**0.5155**
1-soma	**0.4845**

c) Isso significa obter a seqüência FFFS, que tem probabilidade $(0.7)^3(0.3)$ = **0.1029**

(Você pode também pensar na variável Geométrica com probabilidade de sucesso p = 0.3 e em "demorar" 4 repetições para encontrar o 1º. Sucesso)

d) É apenas a probabilidade da sequência FFFFFFFFFF = $(0.7)^{10}$ = **0.0282**

e) É a média da variável Geométrica, 1/p = 1/0.30 = 10/3 = 3.3333

PROBLEMA 3

A probabilidade de uma pessoa entrar numa loja e comprar um certo produto é uma variável aleatória **contínua** X com densidade $\mathbf{f(x) = k.x^2.(1-x)}$**, onde** $\mathbf{0 < x < 1}$**.**

a) A constante k que faz desta expressão uma densidade é:

A	B	**C**	D
6	2	**12**	NDA

b) A função de distribuição de X em x = ½ é:

A	B	**C**	D
1/2	1/4	**5/16**	NDA

c) A probabilidade de X estar no intervalo (0,1/4) é:

A	B	**C**	D
Maior que a prob. de X estar no intervalo (0, ½)	Maior que a prob. de X estar no intervalo (3/4, 1)	**Menor que a prob. de X estar no intervalo (3/4, 1)**	NDA

d) A media da densidade é:

A	B	C	D
0.6	0.4	0.5	NDA

e) O desvio padrão desta densidade é:

A	B	C	D
0.2	0.1	0.4	NDA

Solução

a) A constante k é encontrada pela condição de normalização:

$$\int_0^1 k.x^2(1-x)dx = \int_0^1 k\left(x^2 - x^3\right)dx = k\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = k\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{k}{12} = 1 \Rightarrow k = 12$$

(ALTERNATIVA C)

b) A função de distribuição para qualquer número entre no intervalo [0,1] é:

$$F(x) = \Pr(X \le x) = \int_0^x 12\left(u^2 - u^3\right)du = 12\left(\frac{4u^3 - 3u^4}{12}\right) = 4u^3 - 3u^4$$

Avaliando esta função em u = ½ leva a:

F(1/2) = 4(1/8) – 3(1/16) = ½ - 3/16 = 8/16 – 3/16 = 5/16 **(ALTERNATIVA C)**

c) Do item anterior já vimos que a área entre 0 e ½ é 5/16 e a função de distribuição é sempre não decrescente, logo a alternativa A está errada. Resta calcular a área entre ¾ e 1.

$$\Pr\left(\frac{3}{4} < X < 1\right) = F(1) - F(3/4) = 1 - \left\{4\left(\frac{3}{4}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^4\right\} = 1 - \left\{\frac{108}{64} - \frac{243}{256}\right\} = 1 - \left\{\frac{432-243}{256}\right\} =$$

$$= 1 - \frac{189}{256} = 1 - 0.7383 = 0.2617$$

A probabilidade de X estar no intervalo (0,1/4) é a função de distribuição em ¼, ou seja:

F(1/4) = 4(1/64) – 3(1/256) = 1/16 – 3/256 = 0.0508 (aproximadamente), que é bem **menor** que 0.2617, a probabilidade de X estar no intervalo (3/4, 1). **(ALTERNATIVA C)**

d) A média da densidade é:

$$E(X)=\int_0^1 12x.x^2(1-x)dx=12\int_0^1 x^3(1-x)dx=12\int_0^1(x^3-x^4)dx=12\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=12\left(\frac{1}{20}\right)=\frac{6}{10}=0.6$$

e) A variância desta densidade pode ser obtida a partir do 2º. Momento e o desvio padrão a partir da variância.

$$E(X^2)=\int_0^1 12x^2.x^2(1-x)dx=12\int_0^1 x^4(1-x)dx=12\int_0^1(x^4-x^5)dx=12\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=12\left(\frac{1}{30}\right)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}=0.4$$

A variância é:

VAR(X) = $E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 0.4 - (0.6)^2 = 0.4 - 0.36 = 0.04$

O desvio padrão é a raiza da variância, ou seja, 0.20

PROBLEMA 4

Um terrorista quer envenenar as pessoas numa festa. Nela, são servidas 50 refeições individuais, das quais 5 estão envenenadas.

Calcule as seguintes probabilidades:

a) De, numa mesa de 8 convidados, pelo menos uma pessoa ser envenenada?

A	B	C	D
0.5985	0.4015	0.4085	NDA

b) De, numa mesa de 7 convidados, mais de uma pessoa ser envenenada?

A	B	**C**	D
0.1759	0.4543	**0.1380**	NDA

Solução

a) Seja X o número de pessoas envenenadas nesta mesa. Então:

$$\Pr(X=x)=\frac{\binom{5}{x}\binom{45}{8-x}}{\binom{50}{8}}$$

Queremos encontrar a probabilidade de pelo menos uma pessoa envenenada, isto é, Pr(X=1) + Pr(X=2) +...+ Pr(X=8) = 1 – Pr(X = 0)

Mas,

$$\Pr(X=0)=\frac{\binom{5}{0}\binom{45}{8}}{\binom{50}{8}}=\frac{\binom{45}{8}}{\binom{50}{8}}=\frac{215553195}{536878650}=0.4015$$

E a probabilidade desejada é: 1- 0.4015 = **0.5985 (ALTERNATIVA A)**

b) Agora existem apenas 7 pessoas na mesa e então X, o número de pessoas envenenadas nesta mesa tem probabilidade dada por:

$$\Pr(X=x)=\frac{\binom{5}{x}\binom{45}{7-x}}{\binom{50}{7}}$$

A probabilidade de mais de uma pessoa envenenada é Pr(X=2) +...+ Pr(X=7) =

= 1 – Pr(X = 0) – Pr(X = 1).

$$\Pr(X=0)=\frac{\binom{5}{0}\binom{45}{7-0}}{\binom{50}{7}}=\frac{\binom{45}{7}}{\binom{50}{7}}=\frac{45379620}{99884400}=0.4543$$

$$\Pr(X=1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{45}{7-1}}{\binom{50}{7}}=\frac{5\binom{45}{6}}{\binom{50}{7}}=\frac{40725300}{99884400}=0.4077$$

1- Pr(X = 0) – Pr(X = 1) = 1 – 0.4543 – 0.4077 = **0.1380 (ALTERNATIVA C)**

IND 1115 - Inferência Estatística
Profa. Mônica Barros
FORMULÁRIO P1

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância	fgm
Uniforme	$f(x)=\frac{1}{b-a}$ se $a \le x \le b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Não é útil
Exponencial	$f(x)=\lambda.\exp(-\lambda.x)$ onde $\lambda>0$ e $x \ge 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)$ se $t<\lambda$
Gama	$f(x)=\begin{cases}\frac{\beta^\alpha . x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.e^{-\beta x}, \text{ onde x} \ge 0 \\ 0 \text{ se x } < 0\end{cases}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ se $t<\beta$
Qui-Quadrado	$f(x)=\frac{1}{2^{n/2}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}$	n	2n	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ se $t<1/2$
Binomial	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$ para $x=0,1,2,\dots,n$	n.p	n.p.q	$(pe^t+q)^n$
Hipergeométrica	$f(x)=\Pr(X=x)=\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n.\left(\frac{r}{N}\right)$	$n.\left(\frac{r}{N}\right)\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	Não é útil
Geométrica	$f(n)=\Pr(X=n)=(1-p)^{n-1}p$ onde n = 1, 2, 3, ...	1/p	q/p^2	$M(t)=\frac{pe^t}{1-qe^t}$
Poisson	$\Pr(X=x)=f(x)=\frac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!}$ onde x = 0, 1, 2, ...	λ	λ	$E(e^{tX})=e^{\lambda.(e^t-1)}$
Binomial Negativa	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{x-1}{r-1}.p^r.q^{x-r}$ onde x = r, r + 1, r + 2, ...	r/p	r.q/p^2	$M(t)=\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

Resultados Matemáticos

Série Geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1+a+a^2+a^3+\dots\dots = \frac{1}{1-a} \text{ desde que } |a|<1$$

Teorema Binomial

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \quad \text{onde a e b são número reais e k, n são inteiros} \ge 0$$

Série de Taylor da Exponencial

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^k}{k!}+\dots\dots$$

Função de Distribuição (F(x))

1) F(x) = Pr(X $\le$ x)
2) 0 $\le$ F (x) $\le$ 1
3) F(x) é uma função não decrescente
4) Lim F(x) = 1 se x $\to +\infty$
5) Lim F(x) = 0 se x $\to -\infty$

Relação entre densidade e função de distribuição

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

Se X é uma v.a. contínua, F(x) é contínua. Se X é discreta, F(x) é descontínua

Definição: k-ésimo momento

$$E\left(X^k\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} x^k.f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} x^k.f(x)=\sum_{\text{todo x}} x^k.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Definição: Média ou Valor Esperado de X

$$\mu=E(X)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} x.f(x)=\sum_{\text{todo x}} x.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Definição: k-ésimo momento central

$$E\left((X-\mu)^k\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k.f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k.f(x)=\sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Em particular, se k = 1: E(X – μ) = 0, ou seja, o primeiro momento central é sempre nulo.

Definição: Variância

$$\sigma^2=VAR(X)=E\left((X-\mu)^2\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2.f(x)dx & \text{se X contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2.f(x)=\sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2.\Pr(X=x) & \text{se X discreta}\end{cases}$$

Fórmula alternativa para o cálculo da variância

$$\sigma^2=VAR(X)=E(X^2)-\mu^2$$

Definição: Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

$$E(u(X))=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} u(x).f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} u(x).f(x)=\sum_{\text{todo x}} u(x).\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Definição: Desvio padrão

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{VAR(X)}$$

Propriedades – Média e Variância de constantes e funções lineares

Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer.

Então:

1-) E(a.X + b) = a.E(X) + b

2-) E(a) = a

3-) VAR(a.X+ b) = a^2.VAR(X)

4-) VAR(a) = 0

Propriedade – linearidade do valor esperado:

E{a.u(X) + b.v(X)} = a E {u(X)} + b E {v(X)}

Função Geradora de Momentos (fgm)

$$M(t)=E\left(e^{tX}\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} e^{tx}.f(x)=\sum_{\text{todo x}} e^{tx}.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Poisson como aproximação da Binomial

Se X é Binomial(n, p), onde n é grande e p é pequeno (n > 20 e n.p < 5), pode-se aproximar as probabilidades Binomiais por probabilidades Poisson usando uma Poisson com a mesma média, isto é, usando λ = n.p.

Relação entre Momentos e fgm

$$M^{(k)}(0)=\left.\frac{d^kM(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=E(X^k)$$