IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2008.01
Teste 2 – 05/06/2008
Nome: ____

FOLHA DE RESPOSTAS – PREENCHA A CANETA E NÃO RASURE!!!
Nos problemas de múltipla escolha, marque com um X na folha de respostas a alternativa que você considera correta. O formulário está no final da prova.

PROBLEMA 1 (35 pontos)

	A	B	C	D
Item 1				
Item 2				
Item 3				
Item 4				
Item 5				
Item 6				
Item 7				

PROBLEMA 2 (20 pontos)

	A	B	C	D
Item 1				
Item 2				
Item 3				
Item 4				

PROBLEMA 3 (10 pontos)

Questão discursiva – deixe a resposta junto com o enunciado.

PROBLEMA 4 (35 pontos)

Questão discursiva – deixe a resposta junto com o enunciado.

Problema 1 (35 pontos)

O consumo mensal em minutos por conta de celular numa certa região é uma v.a. Normal com média 40 minutos e desvio padrão 12 minutos.

1) Qual a probabilidade de alguém usar o celular menos de 50 minutos?

2) Qual a probabilidade de alguém usar o celular mais de 35 minutos?

3) Quantos minutos por mês alguém deve passar no celular para estar entre os 10% que mais usam o aparelho?

4) Quantos minutos por mês alguém deve passar no celular para estar entre os 5% que MENOS usam o aparelho?

Toma-se uma amostra de 24 usuários de celular.

5) Qual a probabilidade do tempo médio de uso na amostra exceder 45 minutos?

6) Qual a probabilidade do maior tempo de uso na amostra ser menor que 55 minutos?

7) Qual a probabilidade do menor tempo de uso na amostra ser menor que 25 minutos?

Respostas

	A	B	C	D
Item 1	0.8333	0.2023	0.4167	0.7977
Item 2	0.6615	0.3385	0.8944	0.4167
Item 3	59.74	55.38	63.52	67.92
Item 4	20.26	16.48	24.62	12.08
Item 5	79.77%	20.23%	2.06%	97.94%
Item 6	10.56%	89.44%	6.86%	93.14%
Item 7	10.56%	89.44%	6.86%	93.14%

PROBLEMA 2 (20 pontos)

Um computador gera 8 números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo (0,1).

1) Calcule a probabilidade de que o menor destes números será menor que 0.1.

2) Calcule o valor esperado do menor destes números.

3) Encontre o valor esperado do maior destes 8 números.

4) Calcule a probabilidade de que o maior destes números esteja entre 0.8 e 0.9.

	A	B	C	D
Item 1	**0.4305**	**0.5217**	**0.4783**	**0.5695**
Item 2	**0.1111**	**0.2222**	**0.1250**	**0.1000**
Item 3	**0.9999**	**0.8888**	**0.8750**	**0.9000**
Item 4	**0.2627**	**0.8322**	**0.0000**	**0.5695**

PROBLEMA 3 (10 pontos)

Seja X uma variável aleatória lognormal(μ, σ^2).
Mostre que E(X) = exp(μ + σ^2/2)

Dica: Lembre-se da função geradora de momentos de uma variável Normal. Se Y é Normal (μ, σ^2) então sua fgm é: M(t) = exp(μ.t + $\sigma^2 t^2$/2)

PROBLEMA 4 (35 pontos)

Você quer montar um portfolio com dois ativos que têm as seguintes características:

Ativo A: retorno médio = 3.5%, d.p. retorno = 6%

Ativo B: retorno médio = 1%, d.p. retorno = 2%

1) Calcule o retorno médio do portfolio EM FUNÇÃO DE w (a proporção do ativo A no portfolio). **(5 pontos)**

2) Calcule a variância do portfolio expressando-a como uma função de w e ρ (o coeficiente de correlação ente A e B) **(10 pontos)**

3) Ache w (o peso do ativo A e, conseqüentemente 1- w, o peso do ativo B) que fornece o portfolio de variância mínima, expressando-o como função de ρ. **(10 pontos)**

4) Preencha as células a seguir: **(10 pontos)**

ρ	w (portfolio de variância mínima)	Desvio padrão do portfolio de variância mínima	Desvio padrão do portfolio com pesos iguais para os dois ativos
0			
-0.2			

PROBLEMA 4 - continuação dos cálculos

IND 1115 - Inferência Estatística
Profa. Mônica Barros
FORMULÁRIO P2

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância	fgm
Uniforme	$f(x)=\frac{1}{b-a}$ se $a \le x \le b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Não é útil
Exponencial	$f(x)=\lambda.\exp(-\lambda.x)$ onde $\lambda>0$ e $x \ge 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)$ se $t<\lambda$
Gama	$f(x)=\begin{cases}\frac{\beta^\alpha.x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.e^{-\beta x}, \text{ onde } x \ge 0 \\ 0 \text{ se } x < 0\end{cases}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ se $t<\beta$
Qui-Quadrado	$f(x)=\frac{1}{2^{n/2}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}$	n	2n	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ se $t<1/2$
Binomial	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$ para $x=0,1,2,\ldots,n$	n.p	n.p.q	$(pe^t+q)^n$
Hipergeométrica	$f(x)=\Pr(X=x)=\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n.\left(\frac{r}{N}\right)$	$n.\left(\frac{r}{N}\right)\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	Não é útil
Geométrica	$f(n)=\Pr(X=n)=(1-p)^{n-1}p$ onde n = 1, 2, 3, ...	1/p	q/p^2	$M(t)=\frac{pe^t}{1-qe^t}$
Poisson	$\Pr(X=x)=f(x)=\frac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!}$ onde x = 0, 1, 2, ...	λ	λ	$E(e^{tX})=e^{\lambda.(e^t-1)}$
Binomial Negativa	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{x-1}{r-1}.p^r.q^{x-r}$	r/p	$r.q/p^2$	$M(t)=\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

onde x = r, r + 1, r + 2, ...

Resultados Matemáticos

Série Geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1+a+a^2+a^3+\ldots..=\frac{1}{1-a} \text{ desde que } |a|<1$$

Teorema Binomial

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \quad \text{onde a e b são número reais e k, n são inteiros} \ge 0$$

Série de Taylor da Exponencial

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots...$$

Função de Distribuição (F(x))

1) $F(x) = \Pr(X \le x)$
2) $0 \le F(x) \le 1$
3) F(x) é uma função não decrescente
4) Lim F(x) = 1 se $x \to +\infty$
5) Lim F(x) = 0 se $x \to -\infty$

Se X é uma v.a. contínua, F(x) é contínua. Se X é discreta, F(x) é descontínua

Relação entre densidade e função de distribuição

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

Definição: k-ésimo momento

$$E(X^k)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} x^k.f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} x^k.f(x)=\sum_{\text{todo x}} x^k.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Definição: Média ou Valor Esperado de X

$$\mu=E(X)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} x.f(x)=\sum_{\text{todo x}} x.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Definição: k-ésimo momento central

$$E\left((X-\mu)^k\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k.f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k.f(x)=\sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Em particular, se k = 1: $E(X-\mu) = 0$, ou seja, o primeiro momento central é sempre nulo.

Definição: Variância

$$\sigma^2=VAR(X)=E\left((X-\mu)^2\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2.f(x)dx & \text{se X contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2.f(x)=\sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2.\Pr(X=x) & \text{se X discreta}\end{cases}$$

Fórmula alternativa para o cálculo da variância

$$\sigma^2=VAR(X)=E(X^2)-\mu^2$$

$$E(u(X))=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} u(x).f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} u(x).f(x)=\sum_{\text{todo x}} u(x).\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Definição: Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

Definição: Desvio padrão

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{VAR(X)}$$

Propriedades – Média e Variância de constantes e funções lineares

Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer.

Então:

1-) E(a.X + b) = a.E(X) + b

2-) E(a) = a

3-) VAR(a.X+ b) = a^2.VAR(X)

4-) VAR(a) = 0

Propriedade – linearidade do valor esperado:

E{a.u(X) + b.v(X)} = a E {u(X)} + b E {v(X)}

Função Geradora de Momentos (fgm)

$$M(t)=E\left(e^{tX}\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} e^{tx}.f(x)=\sum_{\text{todo x}} e^{tx}.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Poisson como aproximação da Binomial

Se X é Binomial(n, p), onde n é grande e p é pequeno (n > 20 e n.p < 5), pode-se aproximar as probabilidades Binomiais por probabilidades Poisson usando uma Poisson com a mesma média, isto é, usando λ = n.p.

Relação entre Momentos e fgm

$$M^{(k)}(0)=\left.\frac{d^kM(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=E(X^k)$$

Combinações Lineares de variáveis INDEPENDENTES

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **independentes** com médias $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ e variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$.

Seja: $Y=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_iX_i$

A **variância de Y** é:

$$VAR(Y)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2.VAR(X_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2.\sigma_i^2$$

onde $VAR(X_i)=\sigma_i^2$

E a **fgm de Y** é:

Então, a **média de Y** é:

$$E(Y) = E\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.E(X_i) =$$
$$= a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu_i \quad \text{onde } \mu_i = E(X_i)$$

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t(a_0 + a_1X_1 + \ldots + a_nX_n)}\right)$$
$$= E\left(e^{ta_0}e^{ta_1X_1}\ldots.e^{ta_nX_n}\right) =$$
$$= e^{ta_0}E\left(e^{ta_1X_1}\ldots.e^{ta_nX_n}\right)$$

e como conseqüência da independência

$$= e^{ta_0}E\left(e^{ta_1X_1}\right)E\left(e^{ta_2X_2}\right)\ldots.E\left(e^{ta_nX_n}\right) =$$
$$e^{ta_0}M_{X_1}(ta_1)M_{X_2}(ta_2)\ldots M_{X_n}(ta_n)$$

Combinações Lineares de variáveis DEPENDENTES

Suponha que as médias e variâncias dos X_i´s são como no caso anterior, mas agora eles são DEPENDENTES, de tal forma que: $COV(X_i, X_j) = COV(X_j, X_i) = \rho_{ij}.\sigma_i.\sigma_j$ onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre X_i e X_j.
Seja Y definido como acima.

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

Então E(Y) é o mesmo que no caso de variáveis dependentes, MAS:

$$VAR(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.VAR(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j COV\left(X_i, X_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2.\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad \text{onde no 2o. termo i } \neq \text{ j}$$

onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre X_i e X_j

Portfolio

Combinação linear de ativos onde soma dos pesos = 1. Nos nossos exemplos estamos supondo que todos os pesos são positivos.
A média e a variância do portfolio podem ser obtidas diretamente das expressões acima para combinações lineares de variáveis dependentes. NOTAR que, acima no termo da covariância aparecem $a_i.a_j$ e $a_j.a_i$.

Função Gama

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t}dt$$

Propriedades da Função Gama

1) $\Gamma(n) = (n-1).\Gamma(n-1)$ para n > 1
2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ se n é inteiro > 1
3) $\Gamma(1) = 0! = 1$
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Padronização de uma variável aleatória

Se X tem média a e variância b^2 então Z = (X-a)/b tem média 0 e variância 1. Se, além disso, X é Normal, Z também é Normal.

Cálculo de probabilidades para variáveis Normais

Se X é uma variável Normal com média μ e desvio padrão σ então:

$$\Pr(a \le X \le b) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Simetria da tabela da N(0,1)

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ se z > 0

Combinações Lineares de Variáveis Normais

- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias **independentes**, onde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ e seja $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
- Então Y tem distribuição Normal com média μ_y e variância σ_y^2 dadas por:

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{e} \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Casos particulares: se todos os X_i´s acima são iid com média μ e variância σ^2 então a soma é Normal com média $n.\mu$ e variância $n.\sigma^2$ e a média amostral é Normal com média μ e variância σ^2/n.

Densidade Lognormal

Se X é $N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = e^X$ é Lognormal. Pode-se provar que $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ e

$$VAR(Y) = \exp\left(2\mu + \sigma^2\right).\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Teorema – Relação entre Unif(0,1) e Beta

Sejam X1, X2, ... , Xn variáveis aleatórias independentes com densidade Unif(0,1). Seja Yr o r-ésimo número ordenado dentre os valores observados de X1, X2, ... , Xn (Por exemplo, Y1 é o menor dentre os Xi´s, Y2 é o 2o menor, ..., Yn é o maior deles). Então Yr tem densidade Beta com parâmetros r e n –r + 1.

Densidade Beta

$$f(x) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1} \quad \text{onde } 0 < \text{x} < 1 \text{ e m, n inteiros} \geq 1$$

Se X ~ Beta (m, n) então:

$$E(X) = \frac{m}{m+n}$$

$$VAR(X) = \frac{mn}{(m+n+1)\ (m+n)^2}$$

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(k+m)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(k+m+n)}$$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0,0000	50,00%		1,0000	84,13%		2,0125	97,79%
0,0200	50.80%		1,0100	84.38%		2.0200	97.83%
0,0300	51.20%		1.0167	84.54%		2.0300	97.88%
0,0400	51.60%		1.0250	84.73%		2.0400	97.93%
0,0500	51,99%		1,0500	85,31%		2.0412	97.94%
0,1000	53,98%		1,0553	85,44%		2.0500	97.98%
0,1500	55,96%		1,1000	86,43%		2,1000	98,21%
0,2000	57,93%		1,1180	86,82%		2,2000	98,61%
0,2236	58,85%		1,1475	87,44%		2,2361	98,73%
0,2500	59,87%		1,1500	87,49%		2,3000	98,93%
0,3000	61,79%		1,1553	87,60%		2,3263	99,00%
0,3015	61,85%		1,2000	88,49%		2,3333	99,02%
0,3475	63,59%		1,2060	88,61%		2,4000	99,18%
0,3492	63,65%		1,2200	88,88%		2,5000	99,38%
0,3500	63,68%		1,2500	89,44%		2,5500	99,46%
0,4000	65,54%		1.2700	89.79%		2,5628	99,48%
0.4167	66.15%		1,2816	90,00%		2,6000	99,53%
0,4307	66,67%		1,3000	90,32%		2,6500	99,60%
0,4500	67,36%		1,3333	90,88%		2,6667	99,62%
0,5000	69,15%		1,3750	91.54%		2,6833	99,64%
0,5500	70,88%		1,4000	91,92%		2,7000	99,65%
0,5774	71.81%		1,4468	92,60%		2.7500	99.70%
0,6000	72,57%		1,4500	92,65%		2,8000	99,74%
0,6250	73,40%		1,5000	93,32%		2,9000	99,81%
0,6500	74,22%		1,5500	93,94%		2,9500	99,84%
0,6667	74,75%		1,5811	94,31%		3,0000	99,87%
0,6708	74,88%		1,6000	94,52%		3,1000	99,90%
0,7000	75,80%		1,6450	95,00%		3,1500	99,92%
0,7500	77,34%		1,6667	95,22%		3,2000	99,93%
0,8000	78,81%		1,7000	95,54%			
0,8333	79.77%		1,8000	96,41%			
0,8500	80,23%		1.8500	96.78%			
0.8666	80.69%		1,9000	97,13%			
0,8944	81,45%		1.9500	97.44%			
0,9000	81,59%		1,9600	97,50%			
0,9167	82,03%		1,9800	97,61%			
0,9500	82,89%		2,0000	97,72%			
0,9500	82,89%		2,0100	97,78%			
0,9750	83,52%						
0,9800	83,65%						
0,9900	83,89%						