MQI 2003 – Estatística para Metrologia – semestre 2008.01

Profa. Mônica Barros

LISTA DE EXERCÍCIOS # 1 - GABARITO

PROBLEMA 1

Uma empresa de TV a cabo toma uma amostra de 1000 clientes, com o objetivo de verificar a relação entre a renda familiar e o "pacote" escolhido. Atualmente a empresa possui 4 "pacotes" de serviços: básico, completo, premium e super-premium.

Pacote escolhido → Renda Familiar ↓	Básico	Completo	Premium	Super Premium
até 10 S.M.	180	60	30	20
10 a 20 S.M.	80	40	40	40
20 a 30 S.M.	60	30	60	70
mais de 30 S.M.	40	20	70	160

Uma pessoa é escolhida ao acaso. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que a pessoa tenha renda em cada uma das 4 categorias.

b) Qual a probabilidade de uma pessoa assinar o pacote básico? E o completo? E o premium? E o super-premium?

c) Dado que a pessoa tem renda entre 10 e 20 S.M., qual a probabilidade de que ela assine o pacote premium?

d) Dado que uma pessoa assina o pacote super-premium, qual a probabilidade da sua renda familiar estar acima de 30 S.M.?

e) Existe independência entre faixa de renda e o tipo de "pacote" adquirido? Por que (explique claramente ou dê um exemplo)?

Solução

a) Sejam R_1 = {renda até 10 S.M}, R_2 = {renda entre 10 e 20 S.M}, R_3 = {renda entre 20 e 30 S.M} e R_4 = {renda acima de 30 S.M}.
$Pr(R_1) = (180+60+30+20)/1000 = 290/1000 = 0.29$
$Pr(R_2) = 0.20$; $Pr(R_3) = 0.22$; $Pr(R_4) = 0.29$

b) Sejam C_1 = {pacote básico}, C_2 = {pacote completo}, C_3 = {pacote premium}, C_4 = {pacote super premium}. Então: $Pr(C_1) = 360/1000 = 0.36$, $Pr(C_2) = 0.15$, $Pr(C_3) = 0.20$ e $Pr(C_4) = 0.29$.

c) Agora vamos restringir a amostra apenas aos assinantes com renda entre 10 e 20 S.M, isto é, 200 assinantes. Pr(premium | renda entre 10 e 20 S.M.) = 40/200 = 0.20

d) Agora só olhamos para os assinantes do pacote super premium.

Pr(renda acima de 30 S.M | pacote super premium) = 160/290 = 0.5517

e) Não existe independência entre faixa de renda e o tipo de "pacote" adquirido. Para comprovar isso, basta mostrar que $Pr(R_i \cap C_j) \neq Pr(R_i).Pr(C_j)$ para algum par i, j. Por exemplo, no caso i = j = 1: Pr(renda abaixo de 10 S.M e pacote básico) = 180/1000 = 0.18 ≠ Pr(renda abaixo de 10 S.M).Pr(pacote básico) = (0.29)(0.36) = 0.1044

PROBLEMA 2

A probabilidade de uma pessoa entrar numa loja e comprar um certo produto é uma variável aleatória **contínua** X com densidade $f(x) = k.x^2.(1-x)$, onde $0 < x < 1$.

a) Encontre a constante k que faz desta expressão uma densidade.

b) Calcule a função de distribuição de X.

Solução

$$a)\int_0^1 k.x^2(1-x)dx = \int_0^1 k(x^2 - x^3)dx = k\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right\} = k\left\{\frac{1}{12}\right\} = 1 \Rightarrow k = 12$$

b) $$F(x) = \Pr(X \leq x) = \begin{cases} 0 \quad \text{se } x < 0 \\ 1 \quad \text{se } x > 1 \\ \int_0^x 12(u^2 - u^3)du = 12\left\{\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right\} = 4x^3 - 3x^4 = x^3(4-3x) \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

PROBLEMA 3

Uma caixa contém 6 bolas brancas e 12 bolas azuis.

Uma bola é selecionada aleatoriamente e então é jogada fora e substituída por **uma** bola da cor oposta.

a) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja branca?

b) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja azul?

Uma bola é selecionada aleatoriamente e então é jogada fora e substituída por **duas** bolas da cor oposta.

c) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja branca?

d) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja azul?

Solução

Sejam:

A_1 = 1ª. bola selecionada é azul
A_2 = 2ª. bola selecionada é azul
B_1 = 1ª. bola selecionada é branca (é o complemento de A_1)
B_2 = 2ª. bola selecionada é branca (é o complemento de A_2)

a) Então $Pr(A_1)$ = 12/18 e $Pr(B_1)$ = 6/18

Se "saiu" uma bola branca na 1ª. retirada, a caixa ficou com 5 bolas brancas e 13 azuis.
Logo:
$Pr(B_2 \mid B_1) = 5/18$ e $Pr(A_2 \mid B_1) = 1- 5/18 = 13/18$
Se "saiu" uma bola azul na 1ª. retirada, a caixa ficou com 7 bolas brancas e 11 azuis.
Logo:
$Pr(B_2 \mid A_1) = 7/18$ e $Pr(A_2 \mid B_1) = 11/18$

$$\mathbf{Pr(B_2) = Pr(B_2 \cap B_1) + Pr(B_2 \cap A_1) = Pr(B_2 \mid B_1).Pr(B_1) + Pr(B_2 \mid A_1).Pr(A_1) =}$$
$$\mathbf{= (5/18)(6/18) + (7/18)(12/18) = 114/324 = 0.3519}$$

b) $\mathbf{Pr(A_2) = 1 - Pr(B_2) = 1 - 0.3519 = 0.6481}$

c) Neste caso, $Pr(A_1) = 12/18$ e $Pr(B_1) = 6/18$ mas
Se "saiu" uma bola branca na 1ª. retirada, a caixa ficou com 5 bolas brancas e 14 azuis.
Logo:
$Pr(B_2 \mid B_1) = 5/19$ e $Pr(A_2 \mid B_1) = 14/19$
Se "saiu" uma bola azul na 1ª. retirada, a caixa ficou com 8 bolas brancas e 11 azuis.
Logo:
$Pr(B_2 \mid A_1) = 8/19$ e $Pr(A_2 \mid B_1) = 11/19$

$$\mathbf{Pr(B_2) = Pr(B_2 \cap B_1) + Pr(B_2 \cap A_1) = Pr(B_2 \mid B_1).Pr(B_1) + Pr(B_2 \mid A_1).Pr(A_1) =}$$
$$\mathbf{= (5/19)(6/18) + (8/19)(12/18) = 126/342 = 0.3684}$$

d) $\mathbf{Pr(A_2) = 1 - Pr(B_2) = 1 - 0.3684 = 0.6316}$

PROBLEMA 4

Uma empresa de telefonia celular quer saber como funciona a relação entre o uso do telefone e a renda de seus clientes. Uma pesquisa anterior revelou que:

10 % dos clientes pertencem à classe A.

25% dos clientes pertencem à classe B.

35% dos clientes pertencem à classe C.

30% dos clientes pertencem à classe D.

Dentre os clientes da classe A, 30% usam telefone pré-pago.

Dentre os clientes da classe B, 40% usam telefone pré-pago.

Dentre os clientes da classe C, 70% usam telefone pré-pago.

Dentre os clientes da classe D, 95% usam telefone pré-pago.

Um cliente é escolhido aleatoriamente e tem o serviço pré-pago. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes? (ESCREVA CLARAMENTE OS EVENTOS DE INTERESSE NESTE PROBLEMA)

Solução

$Pr(A) = 0.10$, $Pr(B) = 0.25$, $Pr(C) = 0.35$, $Pr(D) = 0.30$.

Seja R o evento {utilizar serviço pré-pago}.
Então: $Pr(R \mid A) = 0.30$, $Pr(R \mid B) = 0.40$, $Pr(R \mid C) = 0.70$, $Pr(R \mid D) = 0.95$

A probabilidade de um cliente qualquer utilizar roaming é:

$$\Pr(R) = \Pr(R\mid A)\Pr(A) + \Pr(R\mid B)\Pr(B) + \Pr(R\mid C)\Pr(C) + \Pr(R\mid D)\Pr(D) =$$
$$= (0.10)(0.30) + (0.25)(0.20) + (0.35)(0.10) + (0.30)(0.02) = 0.1210$$

Sabendo que um cliente utiliza roaming, a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes de consumo é:

$$\Pr\left(A\mid R\right) = \frac{\Pr(R\mid A)\Pr(A)}{\Pr(R)} = \frac{0.0300}{0.1210} = 0.2479$$

$$\Pr\left(B\mid R\right) = \frac{\Pr(R\mid B)\Pr(B)}{\Pr(R)} = \frac{0.0500}{0.1210} = 0.4132$$

$$\Pr\left(C\mid R\right) = \frac{\Pr(R\mid C)\Pr(C)}{\Pr(R)} = \frac{0.0350}{0.1210} = 0.2893$$

$$\Pr\left(D\mid R\right) = \frac{\Pr(R\mid D)\Pr(D)}{\Pr(R)} = \frac{0.0060}{0.1210} = 0.0496$$

PROBLEMA 5

O retorno mensal de certo investimento de risco pode ser modelado pela variável aleatória R com função de probabilidade dada a seguir:

r	-5 %	0 %	5 %	10 %	15 %
Pr(R = r)	0.35	0.15	0.20	0.20	0.10

Considere agora a variável aleatória X, onde X = 0 se houve retorno negativo ou zero, e X =1 ("sucesso") se houve retorno positivo. Suponha que você aplica o seu dinheiro por 12 meses consecutivos, e que as aplicações em meses subseqüentes são independentes e com a mesma probabilidade de "sucesso". Qual a probabilidade de obter retorno positivo em 9 ou mais meses?

Solução

a) O retorno médio mensal, em percentual, é:

E(R) = (-5)(0.35) + 0(0.15) + (5)(0.20) + (10)(0.20) + 15(0.10) = 2.75%

b) X é uma variável Binomial com parâmetros n = 12 e p = 0.50, pois a probabilidade de um retorno positivo num dado mês é 0.5 da tabela acima.

Queremos encontrar Pr(X ≥ 9) = Pr(X = 9) + ... + Pr(X = 12).

x	Pr(X = x)
9	5.37%
10	1.61%
11	0.29%
12	0.02%
soma	***7.30%***

Logo, $Pr(X \geq 9) = 7.30\%$.

PROBLEMA 6

A probabilidade de uma pessoa ser fumante na população é 8%. Você é fumante e quer acender seu cigarro mas perdeu seu isqueiro. Suponha que os eventos {ter isqueiro} e {ser fumante} são equivalentes. Você sai perguntando a cada pessoa numa enorme fila se elas têm isqueiro.

a) Qual a probabilidade de precisar perguntar a pelo menos cinco pessoas antes de encontrar um fumante?

Solução

Seja X o número de pessoas a quem você tem que perguntar até encontrar um fumante.

Você que encontrar $Pr(X \geq 5)$.
Mas, X é uma variável Geométrica com parâmetro p = 0.08.
Então:
$Pr(X = x) = (0.92)^{x-1}.(0.08)$ para x = 1, 2, 3, ...

$Pr(X \geq 5) = 1 - Pr(X = 1) - Pr(X = 2) - Pr(X = 3) - Pr(X = 4)$

x	Pr(X = x)
1	8.00%
2	7.36%
3	6.77%
4	6.23%
soma	***28.36%***

Pr(X >= 5) = 71.64%

PROBLEMA 7

Um terrorista quer envenenar as pessoas numa festa. Nela, são servidas 60 refeições individuais, das quais 6 estão envenenadas. Qual a probabilidade de, numa mesa de 8 convidados, pelo menos uma pessoa ser envenenada?

Solução

Seja X o número de pessoas envenenadas nesta mesa. Então:

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{54}{8-x}}{\binom{60}{8}}$$

Queremos encontrar a probabilidade de pelo menos uma pessoa envenenada, isto é, Pr(X=1) + Pr(X=2) +...+ Pr(X=8) = 1 – Pr(X = 0)

Mas,

$$\Pr(X = 0) = \frac{\binom{6}{0}\binom{54}{8}}{\binom{60}{8}} = \frac{\binom{54}{8}}{\binom{60}{8}} = 0.4067$$

E a probabilidade desejada é: 1- 0.4067 = 0.5933

PROBLEMA 8

O salário (em milhares de reais) dos funcionários numa empresa pode ser modelado por uma variável contínua X com a seguinte densidade:

$f(x) = \frac{c}{x^2}$ se $2 \le X \le 8$

a) Ache a constante c que faz de f(x) uma densidade.

b) Encontre a função de distribuição de X para qualquer número real x.

c) Ache o ponto m entre 2 e 8 tal que $\Pr(X \le m) = 0.50$. Este ponto é a mediana de X, ou seja, o salário mediano dos funcionários desta empresa.

Solução

a) $\int_2^8 \frac{c}{x^2}dx = 1 \Leftrightarrow c\left\{\frac{-1}{x}\right\}\Big|_2^8 = c\left\{\frac{-1}{8} + \frac{1}{2}\right\} = c\left(\frac{3}{8}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{8}{3}$

b) F(x) = 0 se x ≤ 2 e F(x) = 1 se x ≥ 8.

$F(x) = \int_2^x \frac{8}{3t^2}dt = \frac{8}{3}\left\{\frac{-1}{t}\right\}\Big|_2^x = \frac{8}{3}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right\}$ se 2< x< 8

c) Para achar m é preciso resolver:

$$\frac{8}{3}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right\} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{m} = \frac{3}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16} \Leftrightarrow m = 16/5 = 3.2$$

PROBLEMA 9

Você está procurando emprego e está enviando seu CV. Apenas 10% dos CVs enviados resultam numa entrevista. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que a primeira entrevista ocorrerá no envio do 10º. CV.

b) Você manda exatamente 15 CVs, qual a probabilidade de ser chamado para 2 entrevistas?

c) Você manda exatamente 30 CVs. Qual a probabilidade de ser chamado para menos de 2 entrevistas?

Solução

Seja p a probabilidade de um curriculum enviado resultar numa chamada para entrevista. Então p =0.10.

a) Neste caso queremos encontrar a probabilidade de 9 falhas seguidas de um sucesso, que é:

$$(0.9)^9(0.1) = 0.0387$$

b) Neste caso o número de repetições (número de CVs enviados) é fixo, ou seja, temos uma distribuição Binomial com n = 15 e probabilidade de sucesso (ser chamado para entrevista) igual a 0.1. A probabilidade desejada é:

$$\Pr(X = 2) = \binom{15}{2}(0.1)^2(0.9)^{13} = 0.2669$$

c) Neste caso n = 30 e desejamos encontrar:

$$\Pr(X < 2) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) = \binom{30}{0}(0.1)^0(0.9)^{30} + \binom{30}{1}(0.1)^1(0.9)^{29} =$$

$$= 0.0424 + 0.1413 = 0.1837$$

PROBLEMA 10

A Embratur realiza diversas pesquisas sobre a demanda turística no Brasil. Em 2002 observou-se que:

- 36.4% dos turistas estrangeiros residem na Europa;
- 38.6% residem na América do Sul;
- 19.9% residem na América do Norte;
- 2.1% residem na Ásia;
- 3% residem em outras regiões.

Dentre os residentes na Europa, 40% viajam ao Brasil a negócios;

Dentre os residentes na América do Sul, 35% viajam a negócios;

Dentre os residentes na América do Norte, 45% viajam a negócios;

Dentre os residentes na Ásia, 70% viajam a negócios;

Dentre os residentes de outras partes do planeta, 60% viajam a negócios.

Entrevista-se um turista estrangeiro aleatoriamente e ele está no Brasil a negócios. Qual a probabilidade dele ser proveniente de cada uma das regiões indicadas?

Solução

Sejam:

A_1 = Europa

A_2 = América do Sul

A_3 = América do Norte

A_4 = Ásia

A_5 = outros

$Pr(A_1) = 36.4\%$, $Pr(A_2) = 38.6\%$, $Pr(A_3) = 19.9\%$, $Pr(A_4) = 2.1\%$, $Pr(A_5) = 3\%$

N = viagem de negócios

$$\Pr(N) = \Pr(N|A_1)\Pr(A_1) + \Pr(N|A_2)\Pr(A_2) + \Pr(N|A_3)\Pr(A_3) + \Pr(N|A_4)\Pr(A_4) + \Pr(N|A_5)\Pr(A_5)$$

$$\Pr(N) = \frac{40(36.4) + 35(38.6) + 45(19.9) + 70(2.1) + 60(3)}{100(100)} = \frac{4029.5}{10000} = 0.40295$$

$$\Pr(A_1 | N) = \frac{1456}{4029.5} = 0.3613 \qquad \Pr(A_4 | N) = \frac{147}{4029.5} = 0.0365$$

$$\Pr(A_2 | N) = \frac{1351}{4029.5} = 0.3353 \qquad \Pr(A_5 | N) = \frac{180}{4029.5} = 0.0447$$

$$\Pr(A_3 | N) = \frac{895.5}{4029.5} = 0.2222$$

PROBLEMA 11

O tempo entre as chegadas de táxi num cruzamento é uma variável Exponencial com λ = 1/10 chegadas por minutos. Calcule:

a) A probabilidade de alguém ter que esperar mais de 60 minutos por um táxi.

b) A probabilidade de um táxi demorar menos de 10 minutos para passar.

Solução

Seja T o tempo entre chegadas de um táxi, isto é, o tempo que você terá que esperar por um táxi nesta esquina. T é uma variável Exponencial com λ = 1/10. Sabemos que, para uma variável Exponencial, a função de distribuição é $F(t) = Pr(T \le t) = 1 - \exp(-\lambda.t)$ e também $Pr(T > t) = 1 - F(t) = \exp(-\lambda.t)$. Logo:

a) $Pr(T > 60) = \exp(-60/10) = \exp(-6) = 0.0025$
b) $Pr(T < 10) = 1 - \exp(-10/10) = 1 - \exp(-1) = 0.6321$

PROBLEMA 12

A distância entre buracos numa estrada é uma variável Exponencial com λ = 1/5 buracos por km. Qual a probabilidade de não existirem buracos num trecho de 10 km da estrada?

Solução

Seja T a distância entre os buracos numa estrada. Pelo enunciado, T é uma variável Exponencial com λ = 1/5 buracos por km. Queremos encontrar Pr(T > 10) = exp(-10/5) = exp(-2) = 0.1353.

PROBLEMA 13

Uma pessoa está viajando e pretende alugar um carro.

A distância (em km) que ela irá percorrer diariamente é uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-50}{2500} & \text{se } 50 \le x < 100 \\ \dfrac{150-x}{2500} & \text{se } 100 < x \le 150 \end{cases}$$

Existem duas opções de diárias de aluguel:

1) Opção 1: R$ 70 + R$0.35 por km rodado;
2) Opção 2: R$ 90 se rodar até 120 km e R$ 130 se rodar mais de 120 km num dia.

Qual das opções é mais vantajosa, em termos de apresentar o menor custo esperado de aluguel?

Solução

Seja C o custo diário de aluguel.

Na primeira opção:

C = 70 + 0.35X e então o custo esperado é E(C) = 70 + 0.35.E(X)

Na 2ª. Opção:

$$C = \begin{cases} 90 & \text{se } 50 \le X \le 120 \\ 130 & \text{se } 120 < X \le 150 \end{cases}$$

E(C) = 90.Pr(50 < X < 120) + 130.Pr(120 < X < 150)

Mas,

$$E(X) = \int_{50}^{150} x.f(x)dx = \int_{50}^{100} x\left\{\frac{x-50}{2500}\right\}dx + \int_{100}^{150} x\left\{\frac{150-x}{2500}\right\}dx = \frac{250}{6} + \frac{350}{6} = 100$$

Então, na 1ª. Opção o custo esperado é:

E(C) = 70 + 0.35(100) = R$ 105

Para o cálculo do custo sob a 2ª. Opção precisamos calcular Pr(50 < X < 120) e Pr(120 < X < 150). Note que:

Pr(50 < X < 120) = Pr(50 < X < 100) + Pr(100 < X < 120) = ½ + 8/25 = 0.820

Também,

Pr(120 < X < 150) = $\int_{120}^{150} \frac{150-x}{2500} dx = \frac{9}{50} = 0.18$

Logo, o custo esperado sob a 2ª. Opção é:

E(C) = 90(0.82) + 130(0.18) = R$ 97.2

Logo, a 2ª. Opção é mais econômica.

Problema 14

Seja X uma variável aleatória contínua com densidade Uniforme no intervalo (- θ , θ).
Em cada caso abaixo calcule θ de forma a satisfazer a condição dada.
a) Pr(X > 1/2) = 1/4
b) Pr(X < 1/4) = 3/4
c) Pr(X > 1/2) = 2. Pr(X < -1)
d) Pr(X < 1/2) = 2. Pr(X > 1/4)

Solução

A variável Uniforme no intervalo (- θ , θ) tem densidade:

$$f(x) = \frac{1}{2\theta} \quad \text{se } -\theta < x < \theta$$

a) Pr(X > 1/2) = $\int_{1/2}^{\theta} \frac{1}{2\theta} dx = \frac{1}{2\theta}\left(\theta - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\theta} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4\theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4\theta} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \theta = 1$

b) Pr(X < 1/4) = $\int_{-\theta}^{1/4} \frac{1}{2\theta} dx = \frac{1}{2\theta}\left(\frac{1}{4} + \theta\right) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{8\theta} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{8\theta} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \theta = 1/2$

c) Pr(X > 1/2) = $\int_{1/2}^{\theta} \frac{1}{2\theta} dx = \frac{1}{2\theta}\left(\theta - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\theta}$

e

2. Pr(X < -1) = $2\int_{-\theta}^{-1} \frac{1}{2\theta} dx = \frac{1}{\theta}(-1+\theta) = \frac{-1}{\theta} + 1$

Logo:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4\theta} = -\frac{1}{\theta} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\theta} - \frac{1}{4\theta} = -\frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4\theta} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\theta = 6 \Leftrightarrow \theta = 1.5$$

d) Pr(X < 1/2) = $1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\theta}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\theta}$

2. Pr(X > 1/4) = $2\left\{1 - \frac{1}{2\theta}\left(\frac{1}{4} + \theta\right)\right\} = 2 - \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{4} + \theta\right) = 1 - \frac{1}{4\theta}$

Logo: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4\theta}=1-\frac{1}{4\theta}\Leftrightarrow\frac{2}{4\theta}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\theta=1$

Problema 15

A ocorrência de enchentes de verão no Rio de Janeiro é uma variável aleatória. Toma-se um período de 30 verões, e estamos interessados na variável X que representa o número total de verões em que ocorreram enchentes nestes 30 verões. Suponha que a ocorrência de uma enchente num certo verão não afeta a probabilidade de ocorrência de enchentes em outros verões, e que a probabilidade de enchente **em um verão** qualquer é 3%. Qual a função de probabilidade de X?

a) Calcule a probabilidade de ocorrerem menos de 5 enchentes nestes 30 verões.

b) Aproxime a probabilidade do item a) usando uma distribuição de Poisson apropriada. Qual o

erro percentual absoluto desta aproximação? Defina o erro percentual absoluto como:

$$Erro = 100.\left|\frac{prob.real - prob.aproximada}{prob.real}\right|$$

NOTA: Sugiro usar o Excel

Solução

A função de probabilidade de X é Binomial com n = 30 e p = 0.03. Logo, como n é "grande" e p é "pequeno", esta distribuição pode ser aproximada por uma Poisson com a mesma média, a saber λ = n.p = (30)(0.03) = 0.9.

A probabilidade de ocorrerem menos de 5 enchentes neste verão é:

Pr(X < 5) = Pr(X=0) + Pr(X=1) + ... + Pr(X=4)

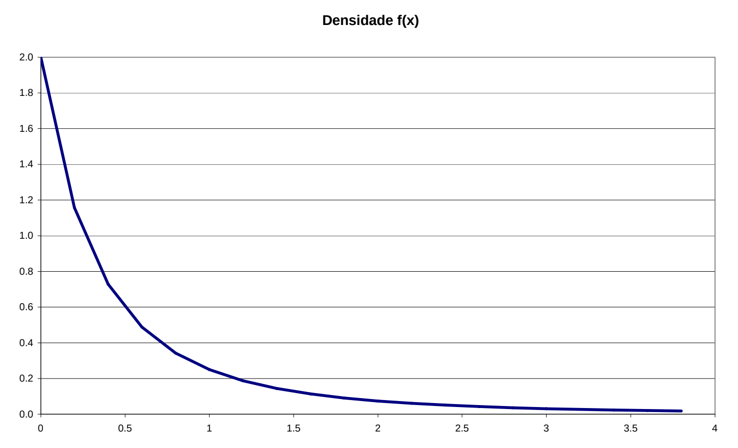
A tabela a seguir exibe as probabilidades para X =0, 1, 2, 3, 4 e Pr(X < 5).

x	Pr(X = x) Binomial	Pr(X = x) Poisson
0	0.4010	0.4066
1	0.3721	0.3659
2	0.1669	0.1647
3	0.0482	0.0494
4	0.0101	0.0111

Assim, a probabilidade exata é: Pr(X < 5) = 0.4010 + 0.3712 + ... + 0.0101 = 0.9982 e a aproximada é: Pr(X < 5) = 0.4066 + .. + 0.0111 = 0.9977.

Problema 16

A duração média em **DIAS** (antes de uma recarga) de baterias de celular é modelada pela seguinte densidade de probabilidade:



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^3} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Considere X = 1 dia = 24 horas na discussão a seguir

Calcule:

a) A probabilidade de que uma bateria precisar ser recarregada antes de 10 horas.
b) A probabilidade de uma bateria durar mais de 24 horas.
c) A probabilidade da bateria durar entre 12 e 24 horas.

Solução

Atenção: todas as probabilidades a calcular envolvem horas, portanto é preciso expressá-las em termos de dias. Por exemplo, 10 horas = (10/24) de um dia.

É convieniente escrever a função de distribuição acumulada:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \int_0^x \frac{2}{(1+y)^3} dy = \frac{2(1+y)^{-2}}{-2}\Bigg|_0^x = 1 - \frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{para todo } x \geq 0$$

a) Pr(X < 10 horas) = Pr(X < 10/24 dias) = F(10/24) = $1 - \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{10}{24}\right)^2} = 0.5017$

b) Pr(X > 24 horas) = Pr(X > 1 dia) = 1 – F(1) = 1 – 0.75 = 0.25

c) Pr(12 horas< X < 24 horas) = F(1) – F(1/2) = 0.7500 – 0.5556 = 0.1944

Problema 17

O número de minutos que você usa no celular a cada mês é uma variável aleatória com densidade f(x) dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3600} & \text{se } 0 \leq x \leq 60 \\ \dfrac{120-x}{3600} & \text{se } 60 < x \leq 120 \end{cases}$$

A operadora de celular oferece dois planos:

Plano A: tarifa de R$35 (que não inclui nada) e R$ 0.75 por minuto de ligação.

Plano B: tarifa de R$55 (que inclui 45 minutos em ligações) e R$ 0.90 por minuto adicional.

Qual o custo médio em cada um dos planos? Em média, qual plano será mais vantajoso para você?

Solução

Seja C = C(X) a função custo em cada um dos planos.

No plano A:

CA = 35 + 0.75*X

No plano B: CB = 55 + 0.90*(X – 45)

Para calcular o custo médio em cada um dos planos é necessário calcular o seu consumo médio (em minutos), E(X).

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx=\int_{0}^{60} x\left(\frac{x}{3600}\right)dx+\int_{60}^{120} x\left(\frac{120-x}{3600}\right)dx=\frac{x^3}{3(3600)}\Bigg|_{0}^{60}+\frac{\left(180x^2-x^3\right)}{3(3600)}\Bigg|_{60}^{120}=$$

$$=\frac{1}{(3600)}\left\{\frac{60(3600)}{3}+60(4)(3600)-\frac{8(60)(3600)}{3}-\frac{3(60)(3600)}{3}+\frac{(60)(3600)}{3}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{60}{3}+60(4)-\frac{11(60)}{3}+\frac{(60)}{3}\right\}=20+240-220+20=60$$

O que poderia ser percebido também por simetria.

Logo, os custos médios em ambos os planos são:

- Plano A

E(CA) = 35+0.75(60) = 80

- Plano B

E(CB) = 55 + 0.90*(60 – 45) = 68.5

O plano B é mais vantajoso na média, pois tem custo mais baixo.

Problema 18

O salário dos funcionários numa empresa pode ser modelado por uma variável contínua X com a seguinte densidade:

$f(x)=c.x^2$ se $1000 \le X \le 8000$

a) Ache a constante c que faz de f(x) uma densidade.
b) Qual o salário médio?
c) Ache o ponto m entre 1000 e 8000 tal que $Pr(X \le m) = 0.50$. Este ponto é a mediana de X, ou seja, o salário mediano dos funcionários desta empresa?

Solução

a) Para achar c precisamos satisfazer a condição:

$$\int_{1000}^{8000} cx^2dx=1 \Leftrightarrow c.\frac{x^3}{3}\Bigg|_{1000}^{8000}=1 \Leftrightarrow \frac{c}{3}(10)^9\{512-1\}=1 \Leftrightarrow \frac{511(10)^9 c}{3}=1 \Leftrightarrow c=\frac{3}{511(10)^9}$$

b) O salário médio é dado por:

$$E(X) = \int_{1000}^{8000} x.f(x)dx = \int_{1000}^{8000} x \frac{3}{511(10)^9} x^2 dx = \frac{3}{511(10)^9} \frac{x^4}{4}\Bigg|_{1000}^{8000} =$$

$$= \frac{3}{(4)511(10)^9}(4096-1)(10)^{12} = \frac{3(4095)(10)^{12}}{(4)511(10)^9} = \frac{3000(4095)}{4(511)} = 6010.27$$

c) O salário mediano é obtido resolvendo-se:

$$\int_{1000}^{m} f(x)dx = 0.5 \Leftrightarrow \int_{1000}^{m} cx^2 dx = 0.5 \Leftrightarrow \frac{c}{3}\left(m^3 - 10^9\right) = 0.5 \Leftrightarrow \frac{1}{511(10)^9}\left(m^3 - 10^9\right) = 0.5$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 10^9 = \frac{511(10)^9}{2} \Leftrightarrow m^3 = 10^9\left\{1 + \frac{511}{2}\right\} \Leftrightarrow m^3 = 10^9\{256.5\} \Leftrightarrow m = 10^3(256.6)^{1/3} = 6353.74$$

Problema 19

Você comprou um sofisticadíssimo videogame e os sites e blogs especializados dizem que a sua chance de conseguir chegar ao final do jogo sem gastar todas as suas "vidas" é de apenas 5/100.

Você é um "cara" muito persistente, e decide jogar até alcançar o primeiro sucesso, ou seja, terminar o jogo sem "morrer" (considere isso como ganhar o jogo).

Suponha também que você não aprende NADA a cada jogada, e então a probabilidade de chegar ao final do jogo sempre está fixa (e igual a 5/100), e que todas as jogadas são independentes.

Calcule as seguintes probabilidades:

a) De você ter que jogar menos de 4 partidas até ganhar o jogo.
b) De você ter que jogar mais de 5 partidas até ganhar o jogo.
c) Suponha agora que você decide jogar EXATAMENTE 20 partidas. Qual a probabilidade de ganhar menos de 2 vezes?

Solução

a) Seja X o número de partidas jogadas até o 1º. Sucesso, ou seja, até você conseguir ganhar o jogo. X é uma variável Geométrica com p = 5/100. Então:

$f(n) = \Pr(X = n) = (1-p)^{n-1} p$ onde n = 1, 2, 3, ...

$$\Pr(X < 4) = \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) + \Pr(X = 3) = \sum_{x=1}^{3} (0.05)(0.95)^{x-1} = 0.1426$$

b) Aqui queremos Pr(X > 5) = Pr(X=6) + Pr(X=7) + ... = 1 – Pr(X=1) – Pr(X=2) - ...- Pr(X=5) nas mesmas condições do item anterior.

$$\Pr(X > 5) = 1 - \sum_{x=1}^{5} (0.05)(0.95)^{x-1} = 1 - 0.2262 = 0.7738$$

c) Agora você decide jogar um número fixo (20) de partidas, e X mede o número de vezes em que você ganha o jogo e é então uma variável Binomial com parâmetros n = 20 e p = 0.05.

Você quer achar Pr(X < 2) = Pr(X = 0) + Pr(X = 1) = 0.3585 + 0.3774 = **0.7358**

Problema 20

Toda manhã você tem que passar por um certo sinal de trânsito bastante demorado. Suponha que a probabilidade do sinal estar aberto é 0.30 e que cada manhã representa uma repetição independente.

a) Numa seqüência de 5 manhãs, qual a probabilidade de você encontrar o sinal aberto em exatamente uma manhã?

b) Numa seqüência de 15 manhãs, qual a probabilidade de você encontrar o sinal aberto em mais de 4 manhãs?

c) Qual a probabilidade de você demorar até a 4ª manhã consecutiva para encontrar o sinal aberto pela 1ª vez?

d) Qual a probabilidade de que o sinal esteja fechado por 10 manhãs consecutivas?

e) Em média, quantas manhãs você vai passar pelo sinal até encontrá-lo aberto pela primeira vez?

Solução

O sinal aberto pode ser encarado como um "sucesso" com probabilidade p = 0.30 e o sinal fechado é uma "falha" com probabilidade 1-p = q= 0.70.

No item a) você faz exatamente 5 repetições, ou seja, passa exatamente 5 vezes pelo sinal, a variável X que mede o número de vezes em que encontra o sinal aberto nestas 5 repetições é Binomial com n = 5 e p = 0.3.

$Pr(X = 1) = 5(0.3)^1(0.7)^4$ = **0.3602**

No item b) temos agora uma variável Binomial, mas com n = 15 e p = 0.3.

Pr(X > 4) = Pr(X = 5) + Pr(X = 6) + ... + Pr(X=15) = 1 – Pr(X = 0) – Pr(X=1) - ... – Pr(X=4) = **0.4845**

x	prob
0	0.0047
1	0.0305
2	0.0916
3	0.1700
4	0.2186
soma	**0.5155**
1-soma	**0.4845**

c) Isso significa obter a seqüência FFFS, que tem probabilidade $(0.7)^3(0.3)$ = **0.1029**

(Você pode também pensar na variável Geométrica com probabilidade de sucesso p = 0.3 e em "demorar" 4 repetições para encontrar o 1º. Sucesso)

d) É apenas a probabilidade da sequência FFFFFFFFFF = $(0.7)^{10}$ = **0.0282**

e) É a média da variável Geométrica, 1/p = 1/0.30 = 10/3 = 3.3333