MQI 2003 – Estatística para Metrologia – semestre 2008.01

Profa. Mônica Barros

LISTA DE EXERCÍCIOS # 2 - GABARITO

PROBLEMA 1

Num shopping localizado numa área privilegiada do Rio de Janeiro verificou-se que um consumidor gasta em média R$600,00 em compras de Natal. A dispersão entre os valores gastos, medida pelo desvio padrão, é R$240,00. Além disso, pode-se encarar os valores gastos pelos consumidores como independentes entre si e Normalmente distribuídos.

a) A empresa controladora pretende oferecer um cartão VIP aos clientes que consomem muito no shopping. Apenas os 1% que mais consomem no período de Natal receberão o cartão. Acima de qual volume de compras um consumidor se candidata ao cartão VIP?

b) Numa loja estão 16 clientes do shopping. Qual a probabilidade do gasto médio em compras de Natal destas 16 pessoas ultrapassar R$ 650,00?

c) Dentre as 16 pessoas nesta mesma loja, qual a probabilidade da pessoa que menos consumiu no shopping no Natal ter gasto mais de R$ 540?

Solução

Seja X o gasto de uma pessoal no shopping no Natal. Para transformar X numa variável N(0,1) precisamos subtrair a média e dividir pelo desvio padrão. Assim, Z = (X – 600)/240 é N(0,1).

a) Na escala da N(0,1), o ponto tal que a probabilidade de estar abaixo dele é 99% é z= 2.3263. O ponto equivalente na escala dos consumos em compras de natal é então:

X = 600 + 240(2.3263) = R$ 1158.32

b) A média amostral, Xbarra, tem distribuição Normal com média R$ 600 e variância $(240)^2/16$. Logo, a probabilidade desejada é:

$$\Pr(\overline{X} > 650) = \Pr\left(\frac{\overline{X} - 600}{\sqrt{\frac{(240)^2}{16}}} > \frac{650 - 600}{\sqrt{\frac{(240)^2}{16}}} \right) = \Pr\left(Z > \frac{50}{\frac{240}{4}} \right) = \Pr\left(Z > \frac{50}{60} \right) = 1 - \Phi(5/6) = 1 - 0.7977 =$$
$$= 0.2023$$

c) Seja U a pessoa que menos consumiu dentre as 16 que estavam na loja. Se ela gastou MAIS de 540, TODAS gastaram. Se ela gastou MENOS de 540, nada podemos afirmar diretamente sobre os gastos individuais de cada pessoa na amostra.

$\Pr(U < 540) = 1 - \Pr(U > 540) = 1 - \Pr(X_1>540, X_2>540, ..., X_{16} > 540)$

E como os consumos de todos os indivíduos são independentes e identicamente distribuídos, a probabilidade acima se reduz a:

$\Pr(X_1>540, X_2>540, ..., X_{16} > 540) = \Pr(X_1>540). \Pr(X_2>540) .... \Pr(X_{16} > 540) =$

$= \{ \Pr(X_1>540) \}^{16}$

Mas,

$$\Pr(X_1 > 540) = \Pr\left(\frac{X - 600}{240} > \frac{540 - 600}{240}\right) = \Pr(Z > -0.25) = 1 - \Phi(-0.25) = \Phi(+0.25) = 0.5987$$

Logo:

$\Pr(U < 540) = 1 - (0.5987)^{16} = 0.9997$

PROBLEMA 2

O saldo devedor dos usuários de um certo cartão de crédito é uma variável aleatória Normal com média R\$ 200 e desvio padrão R\$ 75.

a)Qual a probabilidade do saldo devedor de um usuário estar entre R\$ 100 e R\$ 300?

b)Qual deve ser o seu saldo devedor para que você esteja entre os 5% mais endividados?

c)Toma-se uma amostra de 25 usuários do cartão. Seja o saldo devedor médio nesta amostra. Sabemos que também tem distribuição Normal. Qual a probabilidade de estar entre R\$ 175 e R\$ 235?

Solução

a) X é Normal com média 200 e d.p. 75 e assim $Z = \dfrac{X - 200}{75}$ é N(0,1).

$\Pr(100 < X < 300) =$

$$\Pr\left(\frac{100 - 200}{75} < Z < \frac{300 - 200}{75}\right) = \Pr(-1.333 < Z < +1.333) = \Phi(1.333) - \Phi(-1.333) = 2.\Phi(1.333) - 1 =$$
$$= 0.8176$$

b) Para que você esteja entre os 5% mais endividados, o saldo devedor padronizado deve ser igual a 1.645 (veja tabela da Normal). Daí:

$Z = \dfrac{X - 200}{75} = 1.645 \Rightarrow X = 200 + 1.645(75) = 323.38$ é o saldo para estar entre os 5% com maior saldo devedor.

c) A variável padronizada é agora: $Z = \dfrac{\overline{X} - 200}{75/\sqrt{25}} = \dfrac{5(\overline{X} - 200)}{75}$

$$\Pr\left(\frac{5.(175 - 200)}{75} < Z < \frac{5.(235 - 200)}{75}\right) = \Pr(- < Z <) = \Phi(2.3333) - \Phi(-1.6667) = 0.9902 - 0.0478 = 0.9424$$

PROBLEMA 3

O O consumo mensal em minutos por conta de celular numa certa região é uma v.a. Normal com média 40 minutos e desvio padrão 12 minutos.

a)Qual a probabilidade de alguém usar o celular menos de 50 minutos?

b)Qual a probabilidade de alguém usar o celular mais de 35 minutos?

c)Quantos minutos por mês alguém deve passar no celular para estar entre os 10% que mais usam o aparelho?

d)Quantos minutos por mês alguém deve passar no celular para estar entre os 5% que MENOS usam o aparelho?

Toma-se uma amostra de 24 usuários de celular.

e)Qual a probabilidade do tempo médio de uso na amostra exceder 45 minutos?

f)Qual a probabilidade do maior tempo de uso na amostra ser menor que 50 minutos?

g)Qual a probabilidade do menor tempo de uso na amostra ser menor que 40 minutos?

Solução

X = consumo em minutos ~ N(40, 144)

Pr(X < 50) = $\Pr\left(\frac{X-40}{12} < \frac{50-40}{12}\right) = \Pr(Z < 10/12) = \Phi\left(\frac{5}{6}\right) = \Phi(0.8333) = 0.7977$

Pr(X > 35) = $\Pr\left(\frac{X-40}{12} > \frac{35-40}{12}\right) = 1 - \Pr(Z > -5/12) = 1 - \Phi\left(\frac{-5}{12}\right) =$

$= 1 - \Phi(-0.4167) = \Phi(+0.4167) = 0.6615$

Para ser um dos 10% que mais usam o aparelho, a variável normalizada é z = 1.2816

Logo:

$$\frac{X-40}{12} = 1.2816 \Leftrightarrow X = 40 + 12(1.2816) = 55.38 \text{ minutos}$$

Para estar entre os 5% que menos usam o celular, a variável normalizada é z = -1.645 e então:

$$\frac{X-40}{12} = -1.645 \Leftrightarrow X = 40 + 12(-1.645) = 20.26 \text{ minutos}$$

Agora considere uma amostra de 24 usuários de celular. O tempo médio é uma variável Normal com média 40 minutos e variância $(12)^2/24 = 6$.

e) $\Pr(\overline{X} > 45) = \Pr\left(\frac{\overline{X}-40}{\sqrt{6}} > \frac{45-40}{\sqrt{6}}\right) = \Pr\left(Z > \frac{45-40}{\sqrt{6}}\right) = \Pr(Z > 2.0412) =$

$= 1 - \Phi(2.0412) = 1 - 0.9794 = 0.0206$

f) Seja V = Max(X_1, X_2, ..., X_{24}). Então Pr(V < 50) = Pr(X_1 < 50, X_2 < 50, ..., X_{24} < 50) e como os X_i´s são iid, esta probabilidade é igual a $\{\Pr(X_1 < 50)\}^{24}$. Mas:

$$\Pr(X_1 < 50) = \Pr\left(\frac{X_1 - 40}{12} < \frac{50-40}{12}\right) = \Pr\left(Z < \frac{50-40}{12}\right) = \Phi(0.8333) = 0.7977$$

(vide item a))

E então: $\Pr(V < 50) = (0.7977)^{24} = 0.0044$

g) Seja $U = \mathrm{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_{24})$. Então:

$\Pr(U < 40) = 1 - \Pr(U \geq 40) = 1 - \Pr(X_1 \geq 40, X_2 \geq 40, \ldots, X_{24} \geq 40) = 1 - \{\Pr(X_1 \geq 40)\}^{24}$
$= 1 - \{0.50\}^{24} = 100\%$