MQI 2003 – Estatística para Metrologia – semestre 2008.01

Lista 3 - Gabarito

PROBLEMA 1

Item	A	B	C	D
1			■	
2		■		
3			■	
4	■			
5		■		
6	■			
7			■	
8		■		
9	■			
10		■		
11	■			
12		■		
13	■			
14			■	
15		■		
16	■			
17				■
18	■			

PROBLEMA 1

Considere a seguinte densidade conjunta: (NOTE QUE A CONSTANTE JÁ FOI CALCULADA E PORTANTO A INTEGRAL DUPLA DA CONJUNTA É UM).

USE O VERSO DA PROVA E DO FORMULÁRIO PARA FAZER SEUS CÁLCULOS.

$$f(x,y)=\frac{10}{3}xy+\frac{y^2}{2} \quad \text{onde } 0<x<1 \text{ e } 0<y<1$$

1) A expressão da densidade marginal de X é (em todos os casos é definida para x em (0,1))

A	B	C	D
$\frac{5x+1}{6}$	$\frac{10x^2+5}{6}$	$\frac{10x+1}{6}$	$\frac{10x+1}{3}$

$$f_x(x)=\int_0^1 \frac{10}{3}xy+\frac{y^2}{2}dy=\frac{10}{3}x\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1+\frac{y^3}{6}\bigg|_0^1=\frac{10x}{6}+\frac{1}{6}=\frac{10x+1}{6}$$

2) O valor esperado de X (E(X)) é:

A	B	C	D
13/36	23/36	10/36	23/18

$$E(X)=\int_0^1 x\left(\frac{10x+1}{6}\right)dx=\frac{1}{6}\left\{\frac{10x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right\}\bigg|_0^1=\frac{1}{6}\left\{\frac{10}{3}+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{6}\left\{\frac{20+3}{6}\right\}=\frac{23}{36}$$

3) A expressão da densidade marginal de Y é (em todos os casos é definida para y em (0,1))

A	B	C	D
$\frac{3y+10}{6}$	$\frac{3y^2+5y}{6}$	$\frac{3y^2+10y}{6}$	$\frac{10y+3}{6}$

$$f_Y(y)=\int_0^1 \frac{10}{3}xy+\frac{y^2}{2}dx=\frac{10}{3}y\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1+\frac{y^2}{2}x\bigg|_0^1=\frac{10y}{6}+\frac{y^2}{2}=\frac{3y^2+10y}{6}$$

4) O valor esperado de Y (E(Y)) é:

A	B	C	D
49/72	49/36	29/36	NDA

$$E(Y)=\int_0^1 y\left(\frac{3y^2+10y}{6}\right)dy=\frac{1}{6}\left\{\frac{3y^4}{4}+10\frac{y^3}{3}\right\}\bigg|_0^1=\frac{1}{6}\left\{\frac{3}{4}+\frac{10}{3}\right\}=\frac{1}{6}\left\{\frac{49}{12}\right\}=\frac{49}{72}$$

5) O valor esperado de X.Y, E(XY) é:

A	B	C	D
10/27	187/432	17/27	NDA

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy\left\{\frac{10}{3}xy+\frac{y^2}{2}\right\}dxdy=\int_0^1 \frac{10}{3}y^2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{y^3}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 dy=$$

$$=\int_0^1 \frac{10}{9}y^2+\frac{y^3}{4}dy=\left(\frac{10}{9}\frac{y^3}{3}+\frac{1}{4}\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{10}{27}+\frac{1}{16}=\frac{160+27}{27(16)}=\frac{187}{432}$$

6) A covariância entre X e Y é:

A	B	C	D
-5/2592	667/1296	187/432	NDA

COV(X,Y) = E(XY)- E(X).E(Y) = 187/432 – (23/36)(49/72) = 187/((2*216)) – 1127/((12*216))

$$COV(X,Y)=\frac{187}{2(216)}-\frac{1127}{12(216)}=\frac{6(187)-1127}{12(216)}=\frac{1122-1127}{2592}=\frac{-5}{2592}$$

7) O segundo momento de X, $E(X^2)$ é:

A	B	C	D
1/2	31/60	17/36	49/72

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2\left(\frac{10x+1}{6}\right)dx=\frac{1}{6}\left\{\frac{10x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right\}\Big|_0^1=\frac{1}{6}\left\{\frac{10}{4}+\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{6}\left\{\frac{30+4}{12}\right\}=\frac{34}{72}=\frac{17}{36}$$

8) O segundo momento de Y, $E(Y^2)$ é:

A	B	C	D
1/2	31/60	17/36	49/72

$$E(Y^2)=\int_0^1 y^2\left(\frac{3y^2+10y}{6}\right)dy=\frac{1}{6}\left\{\frac{3y^5}{5}+10\frac{y^4}{4}\right\}\Big|_0^1=\frac{1}{6}\left\{\frac{3}{5}+\frac{10}{4}\right\}=\frac{1}{6}\left\{\frac{62}{20}\right\}=\frac{1}{6}\left(\frac{31}{10}\right)=\frac{31}{60}$$

9) o desvio padrão de X é, aproximadamente:

A	B	C	D
0.2531	0.1551	0.1325	0.2313

$$VAR(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{17}{36}-\left(\frac{23}{36}\right)^2=\frac{17(36)-23(23)}{(36)^2}=\frac{612-529}{1296}=\frac{83}{1296}$$

O desvio padrão de X é:

$$dp(X)=\sqrt{\frac{83}{1296}}=0.2531$$

10) O desvio padrão de Y é, aproximadamente:

A	B	C	D
0.2531	0.2313	0.1325	0.1061

$$VAR(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\frac{31}{60}-\left(\frac{49}{72}\right)^2=\frac{31}{60}-\frac{2401}{5184}=\frac{160704-144060}{311040}=\frac{16644}{311040}$$

$$dp(Y)=\sqrt{\frac{16644}{311040}}=0.2313$$

11) O coeficiente de correlação entre X e Y é, aproximadamente:

A	B	C	D
-3.3%	-33%	+5.2%	+0.1%

$$\rho=\frac{COV(X,Y)}{dp(X).dp(Y)}=\frac{-5/2592}{(0.2531)(0.2313)}=-0.033=-3.3\%$$

12) A densidade condicional de X dado Y = y é:

A	B	C	D
$\frac{3x+10y}{6x+10}$ 0<x<1 e 0<y<1	$\frac{3y+20x}{3y+10}$ 0<x<1 e 0<y<1	$\frac{3x+20y}{3x+10}$ 0<x<1 e 0<y<1	$\frac{3y+10x}{6y+10}$ 0<x<1 e 0<y<1

A densidade condicional de X dado Y = y é a conjunta dividida pela marginal de Y, que é dada por:

$$f_Y(y)=\frac{3y^2+10y}{6}$$

Ou seja:

$$f(x\,|\,y)=\frac{\frac{10xy}{3}+\frac{y^2}{2}}{\frac{3y^2+10y}{6}}=\frac{\frac{20xy+3y^2}{6}}{\frac{3y^2+10y}{6}}=\frac{3y^2+20xy}{3y^2+10y}=\frac{3y+20x}{3y+10}$$

que é linear para a variável aleatória X, pois y deve ser encarado como um parâmetro desta densidade. À medida que y muda, temos uma densidade diferente.

13) A média condicional de X dado Y =y é:

A	B	C	D
$\frac{9y+40}{18y+60}$	$\frac{18y+40}{18y+60}$	$\frac{18y+40}{9y+60}$	$\frac{18x+40}{18x+60}$

É a média da densidade condicional do item anterior. Lembre-se que a variável aleatória é x, portanto a integral deve ser feita em x.

$$E(X\,|\,Y=y)=\int_0^1 x\left(\frac{3y+20x}{3y+10}\right)dx=\frac{1}{3y+10}\int_0^1 3yx+20x^2dx=\frac{1}{3y+10}\left\{\frac{3yx^2}{2}+20\frac{x^3}{3}\right\}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3y+10}\left\{\frac{3y}{2}+\frac{20}{3}\right\}=\frac{1}{3y+10}\left\{\frac{9y+40}{6}\right\}=\frac{9y+40}{18y+60}$$

14) A média condicional de X dado **Y = 1 / 3** é aproximadamente:

A	B	C	D
0.6389	0.5277	0.6515	0.6282

Substituindo no item anterior y = 1/3 temos:

E(X|y=1/3) = {40 + 3}/{60 +6} = 43/66 = 0.6515

15) A densidade condicional de Y dado X = x é: (em todos os casos, 0 < x < 1 e 0 <y < 1)

A	B	C	D
$\frac{20x+3y}{10x+1}$	$\frac{20xy+3y^2}{10x+1}$	$\frac{20xy+3x^2}{10y+1}$	$\frac{10xy+3y^2}{10x+3}$

A densidade condicional de Y dado X = x é a conjunta dividida pela marginal de x, ou seja:

$$f(y|x)=\frac{\frac{10xy}{3}+\frac{y^2}{2}}{\frac{10x+1}{6}}=\frac{\frac{20xy+3y^2}{6}}{\frac{10x+1}{6}}=\frac{3y^2+20xy}{10x+1}$$

16) A média condicional de Y dado X = x é:

A	B	C	D
$\frac{80x+9}{120x+12}$	$\frac{80y+9}{120y+12}$	$\frac{40x+18}{120x+9}$	$\frac{40x+18}{120x+8}$

$$E(Y|X=x)=\int_0^1 y\left(\frac{3y^2+20xy}{10x+1}\right)dy=\frac{1}{10x+1}\left\{3\frac{y^4}{4}+20x\frac{y^3}{3}\right\}\Bigg|_0^1=\frac{1}{10x+1}\left\{\frac{3}{4}+\frac{20x}{3}\right\}=$$

$$=\frac{1}{10x+1}\left\{\frac{9+80x}{12}\right\}=\frac{80x+9}{120x+12}$$

17) A média condicional de Y dado **X = 1 / 2** é aproximadamente:

A	B	C	D
0.6395	0.6859	0.5507	0.6806

Do item anterior:

$$E(Y|X=1/2)=\frac{80(1/2)+9}{120(1/2)+12}=\frac{40+9}{60+12}=\frac{49}{72}=0.6806$$

18) A mediana da densidade marginal de X é aproximadamente:

A	B	C	D
0.6810	0.6388	0.6667	0.5

A mediana (m) da densidade de X é encontrada através de:

$$\int_0^m \frac{10x+1}{6}dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{6}\left\{\frac{10x^2}{2}+x\right\}\Bigg|_0^m = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{\frac{10x^2}{2}+x\right\}\Bigg|_0^m = 3 \Rightarrow 5m^2+m-3=0$$

Resolvendo a equação de 2º. Grau e lembrando que a única raiz que interessa é a positiva temos:

Δ = 1 – 4(5)(-3) = 61

m = (-1 + $\sqrt{61}$)/10 = 0.6810