

MQI 2003 – ESTATÍSTICA PARA METROLOGIA - SEMESTRE 2008.01

Teste 1 – 26/05/2008

Nome: _____

PROBLEMA 1

O preço de um certo carro usado é uma variável Normal com média R\$ 25 mil e desvio padrão R\$ 2400,00.

- a) Você está interessado em comprar este carro e pesquisa muitos anúncios no jornal e na internet. Como você não entende nada de mecânica, prefere comprar um carro mais caro e (supostamente) em melhores condições, pois não quer ter aborrecimentos futuros. A partir de quanto você deve pagar para comprar um carro dentre os 1% mais caros?
- b) Qual a probabilidade de você pagar mais de R\$ 26440,00 por um carro?
- c) Considere uma amostra de 9 carros escolhidos aleatoriamente. Qual a probabilidade do preço médio na amostra exceder R\$ 24360 mil?
- d) Considere uma amostra de 9 carros (como no item anterior). Qual a probabilidade do carro mais caro custar mais de R\$ 23800?
- e) Considere uma amostra de 9 carros (como no item anterior). Qual a probabilidade do carro mais barato custar mais de R\$ 24280?

PROBLEMA 2

Toda manhã você tem que passar por um certo sinal de trânsito bastante demorado. Suponha que a probabilidade do sinal estar aberto é **0.20** e que cada manhã representa uma repetição independente.

- a) Numa seqüência de **6 manhãs**, qual a probabilidade de você encontrar o sinal aberto exatamente uma manhã?
- b) Numa seqüência de **10 manhãs**, qual a probabilidade de você encontrar o sinal aberto em mais de 4 manhãs?
- c) Qual a probabilidade de você demorar **até a 5ª manhã** consecutiva para encontrar o sinal aberto pela 1ª vez?
- d) Qual a probabilidade de que o sinal esteja fechado por **8 manhãs** consecutivas?
- e) **Em média**, quantas manhãs você vai passar pelo sinal até encontrá-lo aberto pela primeira vez?

PROBLEMA 3

Uma pessoa está viajando e pretende alugar um carro.

A distância (em km) que ela irá percorrer diariamente é uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \frac{3}{500000} \{-x^2 + 220x - 9600\}$$

Onde $60 \leq x \leq 160$

Existem duas opções de diárias de aluguel:

- 1) Opção 1: R\$ 70 + R\$0.35 por km rodado;
- 2) Opção 2: R\$ 100 se rodar até 120 km e R\$ 140 se rodar mais de 120 km num dia.

Mostre que a opção 1 é mais vantajosa que a opção 2 pois tem menor custo esperado (R\$ 108.50 versus R\$ 114.08).

PROBLEMA 4

Uma empresa de comércio eletrônico quer saber como funciona a relação entre o interesse por certos produtos e a renda de seus clientes. Uma pesquisa anterior revelou que:

25 % dos clientes pertencem à classe A.

35% dos clientes pertencem à classe B.

30% dos clientes pertencem à classe C.

10% dos clientes pertencem à classe D.

Dentre os clientes da classe A, 60% já pesquisaram no site da empresa por notebooks.

Dentre os clientes da classe B, 50% usam pesquisaram no site da empresa por notebooks.

Dentre os clientes da classe C, 40% pesquisaram no site da empresa por notebooks.

Dentre os clientes da classe D, 20% pesquisaram no site da empresa por notebooks.

Um cliente é escolhido aleatoriamente e está pesquisando no site sobre notebooks. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes? (ESCREVA CLARAMENTE OS EVENTOS DE INTERESSE NESTE PROBLEMA)

MQI 2003 – ESTATÍSTICA PARA METROLOGIA - SEMESTRE 2008.01

Prof. Mônica Barros

Definições Básicas**Eventos mutuamente exclusivos – a probabilidade da sua interseção é o conjunto vazio****Eventos independentes (definição para 2 eventos) - a probabilidade da sua interseção é o produto das suas probabilidades****Definição axiomática de probabilidade**i) $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo $A \subseteq S$ ii) $P(S) = 1$ iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$ onde os A_i são mutuamente exclusivos.Em particular, de iii) segue que: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ se A_1 e A_2 forem mutuamente exclusivos**Da definição de probabilidade segue que:**iv) $P(\emptyset) = 0$ v) Para todo $A \subseteq S$, $P(A^c) = 1 - P(A)$ onde A^c é o complemento de A vi) Para todo $A \subseteq S$, $0 \leq P(A) \leq 1 = P(S)$ vii) Para quaisquer A_1 e A_2 em S tais que $A_1 \subseteq A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$ **Lei da Adição** Para quaisquer A_1 e A_2 em S : $\Pr(A_1 \cup A_2) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) - \Pr(A_1 \cap A_2)$ **Partição do Espaço Amostral**

B_1, B_2, \dots, B_k formam uma partição de S se a união dos B_k 's é S e se os B_k 's são todos mutuamente exclusivos. Se B_1, B_2, \dots, B_k formam uma partição de S e A é um evento qualquer em S então: $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \dots \cup (A \cap B_k)$. Mas, os $(A \cap B_i)$ são mutuamente exclusivos e então: **$\Pr(A) = \Pr(A \cap B_1) + \Pr(A \cap B_2) + \Pr(A \cap B_3) + \dots + \Pr(A \cap B_k)$**

Probabilidade Condicional $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ desde que $P(B)$ seja > 0

Analogamente,

 $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ desde que $P(A)$ seja > 0 **Teorema da Multiplicação** **$P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A) = P(A | B) \cdot P(B)$**

Daí:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Teorema da Probabilidade TotalConsiderando a partição B_1, B_2, \dots, B_k e um evento A qualquer em S , $\Pr(A \cap B_i) = \Pr(B_i) \cdot \Pr(A|B_i)$ para $i = 1, 2, \dots, k$. Então: **$\Pr(A) = \Pr(B_1) \cdot \Pr(A|B_1) + \Pr(B_2) \cdot \Pr(A|B_2) + \dots + \Pr(B_k) \cdot \Pr(A|B_k)$** **Teorema de Bayes**"Mistura" os teoremas da multiplicação e da probabilidade total. Sejam B_1, B_2, \dots, B_k uma partição de S e A um evento qualquer em S . Então:

$$\Pr(B_i | A) = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\sum_{j=1}^k \Pr(A | B_j) \Pr(B_j)} = \frac{\Pr(A | B_i) \Pr(B_i)}{\sum_{j=1}^k \Pr(A | B_j) \Pr(B_j)}$$

Para qualquer evento B_i na partição e qualquer A .**Amostragem COM e SEM reposição**

Nos dois casos:

População tem r objetos do tipo I e $N-r$ objetos do tipo II, num total de N objetos (tamanho da população). A amostra tem tamanho n , dos quais x elementos são do tipo I e $n-x$ do tipo II.A probabilidade de exatamente x objetos do tipo I na amostra SEM reposição é:

$$\frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{onde} \quad \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$\binom{r}{x} = \frac{r!}{x!(r-x)!}$$

$$\binom{N-r}{n-x} = \frac{(N-r)!}{(n-x)!(N-n-(r-x))!}$$

E na amostra COM reposição é:

$$\binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x \cdot (1-p)^{n-x} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Onde $p = r/N$ é a proporção de objetos do tipo I na amostra (que é mantida fixa).

Função de Probabilidade

É uma função que associa a cada possível valor de uma variável aleatória discreta a sua probabilidade de ocorrência.

$f(x) = \Pr(X = x)$ é uma função de probabilidade se:

$$\Pr(X = x) = f(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x$$

$$\sum_{\text{todo } x} \Pr(X = x) = \sum_{\text{todo } x} f(x) = 1$$

Função Densidade de Probabilidade

Serve para calcular probabilidades para variáveis contínuas. Deve satisfazer:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Função de Distribuição (F(x))

- 1) $F(x) = \Pr(X \leq x)$
- 2) $0 \leq F(x) \leq 1$
- 3) $F(x)$ é uma função não decrescente
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ se $x \rightarrow +\infty$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ se $x \rightarrow -\infty$
- 6) Se X é uma v.a. contínua, $F(x)$ é contínua. Se X é discreta, $F(x)$ é descontínua

Relação entre densidade e função de distribuição

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ se $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial	$f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x)$ onde $\lambda > 0$ e $x \geq 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Binomial	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$ para $x = 0, 1, 2, \dots, n$	n.p	n.p.q
Geométrica	$f(n) = \Pr(X = n) = (1-p)^{n-1} p$ onde $n = 1, 2, 3, \dots$	$1/p$	q/p^2

Poisson	$\Pr(X = x) = f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$ onde $x = 0, 1, 2, \dots$	λ	λ
Binomial Negativa	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{x-r}$ onde $x = r, r+1, r+2, \dots$	r/p	$r \cdot q/p^2$

Resultados Matemáticos	
Série Geométrica	
$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{1}{1-a}$ desde que $ a < 1$	
Teorema Binomial	
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ onde a e b são número reais e k, n são inteiros ≥ 0	
Série de Taylor da Exponencial	
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} \right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$	

Definição: k-ésimo momento

$$E(X^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} x^k \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} x^k \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: Média ou Valor Esperado de X

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} x \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} x \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: k-ésimo momento central

$$E((X - \mu)^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^k \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^k \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Em particular, se $k = 1$: $E(X - \mu) = 0$, ou seja, o primeiro momento central é sempre nulo.

Definição: Variância

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E((X - \mu)^2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ discreta} \end{cases}$$

Fórmula alternativa para o cálculo da variância

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Definição: Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

$$E(u(X)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} u(x) \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} u(x) \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\text{VAR}(X)}$$

Transformação numa variável N(0,1)

Transformação numa $N(0,1)$
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $Z = (X - \mu) / \sigma$ é uma variável Normal com média 0 e variância 1.

Tabela da N(0,1)

Apresenta os valores de z e $\Phi(z)$ para z não negativos, onde Φ é a função de distribuição da $N(0,1)$.

Simetria da tabela da N(0,1)

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \text{ onde } z \text{ é } > 0$$

Propriedades – Média e Variância de constantes e funções lineares

Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer.

Então:

$$1-) E(a.X + b) = a.E(X) + b$$

$$2-) E(a) = a$$

$$3-) VAR(a.X + b) = a^2.VAR(X)$$

$$4-) VAR(a) = 0$$

Propriedade – linearidade do valor esperado:

$$E\{a.u(X) + b.v(X)\} = a E \{u(X)\} + b E \{v(X)\}$$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	$\Phi(z)$		z	$\Phi(z)$		z	$\Phi(z)$
0,0000	50,00%		1,0000	84,13%		2,0125	97,79%
0,0200	50,80%		1,0100	84,38%		2,0200	97,83%
0,0300	51,20%		1,0167	84,54%		2,0300	97,88%
0,0400	51,60%		1,0250	84,73%		2,0400	97,93%
0,0500	51,99%		1,0500	85,31%		2,0412	97,94%
0,1000	53,98%		1,0553	85,44%		2,0500	97,98%
0,1500	55,96%		1,1000	86,43%		2,1000	98,21%
0,2000	57,93%		1,1180	86,82%		2,2000	98,61%
0,2236	58,85%		1,1475	87,44%		2,2361	98,73%
0,2500	59,87%		1,1500	87,49%		2,3000	98,93%
0,3000	61,79%		1,1553	87,60%		2,3263	99,00%
0,3015	61,85%		1,2000	88,49%		2,3333	99,02%
0,3475	63,59%		1,2060	88,61%		2,4000	99,18%
0,3492	63,65%		1,2200	88,88%		2,5000	99,38%
0,3500	63,68%		1,2500	89,44%		2,5500	99,46%
0,4000	65,54%		1,2700	89,79%		2,5628	99,48%
0,4167	66,16%		1,2816	90,00%		2,6000	99,53%
0,4307	66,67%		1,3000	90,32%		2,6500	99,60%
0,4500	67,36%		1,3333	90,88%		2,6667	99,62%
0,5000	69,15%		1,3750	91,54%		2,6833	99,64%
0,5500	70,88%		1,4000	91,92%		2,7000	99,65%
0,5774	71,81%		1,4468	92,60%		2,7500	99,70%
0,6000	72,57%		1,4500	92,65%		2,8000	99,74%
0,6250	73,40%		1,5000	93,32%		2,9000	99,81%
0,6500	74,22%		1,5500	93,94%		2,9500	99,84%
0,6667	74,75%		1,5811	94,31%		3,0000	99,87%
0,6708	74,88%		1,6000	94,52%		3,1000	99,90%
0,7000	75,80%		1,6450	95,00%		3,1500	99,92%
0,7500	77,34%		1,6667	95,22%		3,2000	99,93%
0,8000	78,81%		1,7000	95,54%			
0,8333	79,77%		1,8000	96,41%			
0,8416	80,00%		1,8500	96,78%			
0,8500	80,23%		1,9000	97,13%			
0,8666	80,69%		1,9500	97,44%			
0,8944	81,45%		1,9600	97,50%			
0,9000	81,59%		1,9700	97,56%			
0,9167	82,03%		1,9800	97,61%			
0,9500	82,89%		1,9900	97,67%			
0,9500	82,89%		2,0000	97,72%			
0,9750	83,52%		2,0100	97,78%			
0,9800	83,65%						
0,9900	83,89%						