**MQI 2003 – ESTATÍSTICA PARA METROLOGIA - SEMESTRE 2008.01**
**Teste 1 – 26/05/2008**
**GABARITO**

**PROBLEMA 1**

O preço de um certo carro usado é uma variável Normal com média R$ 25 mil e desvio padrão R$ 2400,00.

a) Você está interessado em comprar este carro e pesquisa muitos anúncios no jornal e na internet. Como você não entende nada de mecânica, prefere comprar um carro mais caro e (supostamente) em melhores condições, pois não quer ter aborrecimentos futuros. A partir de quanto você deve pagar para comprar um carro dentre os 1% mais caros?
b) Qual a probabilidade de você pagar mais de R$ 26440,00 por um carro?
c) Considere uma amostra de 9 carros escolhidos aleatoriamente. Qual a probabilidade do preço médio na amostra exceder R$ 24360 mil?
d) Considere uma amostra de 9 carros (como no item anterior). Qual a probabilidade do carro mais caro custar mais de R$ 23800?
e) Considere uma amostra de 9 carros (como no item anterior). Qual a probabilidade do carro mais barato custar mais de R$ 24280?

**Solução**

Seja X o preço do carro usado. Então:

$$Z = \frac{X - 25000}{2400} \sim N(0,1)$$

a) O percentil 99% da distribuição N(0,1) é, pela tabela, z = 2.3263

Logo, para estar entre os 1% mais caros, o preço do carro deve ser IGUAL OU SUPERIOR A:

$$\frac{X - 25000}{2400} = 2.3263 \Leftrightarrow X = R\$30583.12$$

b) $\Pr(X > 26440) = \Pr\left(\frac{X - 25000}{2400} > \frac{1440}{2400}\right) = \Pr(Z > 0.6) = 1 - \Phi(0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$

c) Numa amostra de 9 carros, o preço médio terá distribuição Normal com média R$ 25 mil e variância $(2400)^2/9$, ou seja, desvio padrão 2400/3 = 800.

$$\Pr\left(\overline{X} > 24360\right) = \Pr\left(\frac{\overline{X} - 25000}{800} > \frac{24360 - 25000}{800}\right) = \Pr\left(Z > -0.8\right) = \Phi\left(+0.8\right) = 0.7881$$

d) Se o carro mais caro custa MAIS que R$ 23800, nada podemos afirmar sobre os preços dos outros carros na amostra. Mas, se o carro mais caro custa MENOS que R$ 23800, então TODOS os carros na amostra custarão MENOS QUE que R$ 23800.

Seja U = max($X_1$, $X_2$, ..., $X_9$) o preço do carro mais caro na amostra.

Então

$$\Pr(U > 23800) = 1 - \Pr(U \le 23800) = 1 - \Pr(X_1 \le 23800, X_2 \le 23800, ...., X_9 \le 23800) =$$
$$= 1 - \{\Pr(X_1 \le 23800)\}^9$$

pois os $X_i$ ´s são independentes e identicamente distribuídos.

Mas:

$$\Pr(X_1 \le 23800) = \Pr\left(\frac{X_1 - 25000}{2400} \le \frac{23800 - 25000}{2400}\right) = \Pr(Z \le -0.5) = 1 - \Phi(+0.5) =$$
$$= 1 - 0.6915 = 0.3085$$

$$\Pr(U > 23800) = 1 - \{\Pr(X_1 \le 23800)\}^9 = 1 - (0.3085)^9 = 0.9999$$

e) Seja V o carro mais barato da amostra, ou seja, V = min($X_1$, $X_2$, ..., $X_9$) **.**

Então:

$$\Pr(V > 24280) = \Pr(X_1 > 24280, X_2 > 24280, ..., X_9 > 24280) = \{\Pr(X_1 > 24280)\}^9$$

Mas:

$$\Pr(X_1 > 24280) = \Pr\left(\frac{X_1 - 25000}{2400} > \frac{24280 - 25000}{2400}\right) = \Pr(Z > -0.3) = 1 - \Phi(-0.3) = \Phi(+0.3) = 0.3821$$

Logo:

$$\Pr(V > 24280) = \{\Pr(X_1 > 24280)\}^9 = (0.3821)^9 = 0.017\%$$

## PROBLEMA 2

Toda manhã você tem que passar por um certo sinal de trânsito bastante demorado. Suponha que a probabilidade do sinal estar aberto é **0.20** e que cada manhã representa uma repetição independente.

a) Numa seqüência de **6 manhãs**, qual a probabilidade de você encontrar o sinal aberto em exatamente uma manhã?

b) Numa seqüência de **10 manhãs,** qual a probabilidade de você encontrar o sinal aberto em mais de 4 manhãs?

c) Qual a probabilidade de você demorar **até a 5ª manhã** consecutiva para encontrar o sinal aberto pela 1ª vez?

d) Qual a probabilidade de que o sinal esteja fechado por **8 manhãs** consecutivas?

e) **Em média**, quantas manhãs você vai passar pelo sinal até encontrá-lo aberto pela primeira vez?

## Solução

O sinal aberto pode ser encarado como um “sucesso” com probabilidade p = 0.20 e o sinal fechado é uma “falha” com probabilidade 1-p = q= 0.80.

No item a) você faz exatamente 6 repetições, ou seja, passa exatamente 6 vezes pelo sinal, a variável X que mede o número de vezes em que encontra o sinal aberto nestas 6 repetições é Binomial com n = 6 e p = 0.2.

$Pr(X = 1) = 6(0.2)^1(0.8)^5 =$ **0.3932**

No item b) temos agora uma variável Binomial, mas com n **= 10 e p = 0.2**.
Pr(X > 4) = Pr(X = 5) + Pr(X = 6) + ... + Pr(X=10) = 1 – Pr(X = 0) – Pr(X=1) - ... – Pr(X=4) =

| x | Pr(X = x) |
|---|---|
| 0 | 0.1074 |
| 1 | 0.2684 |
| 2 | 0.3020 |
| 3 | 0.2013 |
| 4 | 0.0881 |
| **Pr(X < = 3)** | **0.9672** |
| **Pr(X > 4)** | **0.0328** |

c) Isso significa obter a seqüência **FFFFS**, que tem probabilidade $(0.8)^4(0.2) =$ **0.0819**

(Você pode também pensar na variável Geométrica com probabilidade de sucesso p = 0.2 e em “demorar” 5 repetições para encontrar o 1º. Sucesso)

d) É apenas a probabilidade da sequência FFFFFFFF = $(0.8)^8$ = **0.1678**

e) É a média da variável Geométrica, **1/p = 1/0.2 = 10/2 = 5**

## PROBLEMA 3

Uma pessoa está viajando e pretende alugar um carro.
A distância (em km) que ela irá percorrer diariamente é uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \frac{3}{500000}\left\{-x^2 + 220.x - 9600\right\}$$

Onde $60 \leq x \leq 160$

Existem duas opções de diárias de aluguel:

1) Opção 1: R$ 70 + R$0.35 por km rodado;
2) Opção 2: R$ 100 se rodar até 120 km  e R$ 140 se rodar mais de 120 km num dia.

**Mostre que a opção 1 é mais vantajosa que a opção 2 pois tem menor custo esperado (R$ 108.50 versus R$ 114.08).**

**Solução**

Seja C o custo diário de aluguel.

Na primeira opção:

C = 70 + 0.35X e então o custo esperado é E(C) = 70 + 0.35.E(X)

Na 2ª. Opção:

$$C = \begin{cases} 100 & \text{se} \quad 60 \le X \le 120 \\ 140 & \text{se} \quad 120 < X \le 160 \end{cases}$$

E(C) = 100.Pr(60 < X < 120) + 140.Pr( 120 < X < 160)

Mas,

$$E(X) = \int_{60}^{160} x.f(x)dx = \int_{60}^{160} x\frac{3}{500000}\left\{-x^2 + 220x - 9600\right\}dx = \frac{3}{500000}\left\{\frac{-x^4}{4} + 220\frac{x^3}{3} - 9600\frac{x^2}{2}\right\}\Bigg|_{60}^{160} =$$

$$= \frac{3}{500000}\left\{160600000 + 284533333.33 - 105600000\right\} = \frac{3}{500000}\left\{18333333.33\right\} = 110$$

Então, na 1ª. Opção o custo esperado é:

**E(C) = 70 + 0.35(110) = R$ 108.50**

Para o cálculo do custo sob a 2ª. Opção precisamos calcular Pr(60 < X < 120) e Pr( 120 < X < 160)

Note que:

**Pr(120 < X < 160) = 1 - Pr( 60 < X < 120)**

Também,

Pr( 60 < X < 120) =

$$\int_{60}^{120} \frac{3}{500000}\left\{-x^2 + 220x - 9600\right\}dx = \frac{3}{500000}\left\{\frac{-x^3}{3} + 110x^2 - 9600x\right\}\Bigg|_{60}^{120} =$$

$$= \frac{3}{500000}\left\{-504000 + 1188000 - 576000\right\} = \frac{3}{500000}\left\{108000\right\} = \frac{3(108)}{500} = \frac{3(54)}{250} = \frac{3(27)}{125} = \frac{81}{125} =$$

$$= 0.6480$$

Logo, o custo esperado sob a 2ª. Opção é:

**E(C) = 100(0.6480) + 140(1 – 0.6480) = R$ 114.08**

**Logo, a 1ª. Opção é mais econômica.**

**PROBLEMA 4**

Uma empresa de comércio eletrônico quer saber como funciona a relação entre o interesse por certos produtos e a renda de seus clientes. Uma pesquisa anterior revelou que:

25 % dos clientes pertencem à classe A.

35% dos clientes pertencem à classe B.

30% dos clientes pertencem à classe C.

10% dos clientes pertencem à classe D.

Dentre os clientes da classe A, 60% já pesquisaram no site da empresa por notebooks.

Dentre os clientes da classe B, 50% usam pesquisaram no site da empresa por notebooks.

Dentre os clientes da classe C, 40% pesquisaram no site da empresa por notebooks.

Dentre os clientes da classe D, 20% pesquisaram no site da empresa por notebooks.

Um cliente é escolhido aleatoriamente e está pesquisando no site sobre notebooks. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes? (ESCREVA CLARAMENTE OS EVENTOS DE INTERESSE NESTE PROBLEMA)

**Solução**

Pr(A) = 0.25, Pr(B) = 0.35, Pr(C) = 0.30, Pr(D) = 0.10.

Seja R o evento { pesquisar sobre notebooks}.
Então: Pr(R | A) = 0.60, Pr(R | B) = 0.50 , Pr(R | C) = 0.40, Pr(R | D) = 0.20

A probabilidade de um cliente qualquer pesquisar no site sobre notebooks é:

$$\Pr(R) = \Pr(R \mid A).\Pr(A) + \Pr(R \mid B).\Pr(B) + \Pr(R \mid C).\Pr(C) + \Pr(R \mid D).\Pr(D) =$$

$$= \frac{1}{100(100)}\left\{25(60) + 35(50) + 30(40) + 10(20)\right\} = \frac{1}{10000}\left(4650\right) = 0.4650$$

Sabendo que um cliente pesquisa sobre notebook no site, a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes de consumo é:

$$\Pr(A \mid R) = \frac{\Pr(R \mid A).\Pr(A)}{\Pr(R)} = \frac{25(60)}{4650} = \frac{1500}{4650} = 0.3226$$

$$\Pr(B \mid R) = \frac{\Pr(R \mid B).\Pr(B)}{\Pr(R)} = \frac{35(50)}{4650} = \frac{1750}{4650} = 0.3763$$

$$\Pr(C \mid R) = \frac{\Pr(R \mid C).\Pr(C)}{\Pr(R)} = \frac{30(40)}{4650} = \frac{1200}{4650} = 0.2581$$

$$\Pr(D \mid R) = \frac{\Pr(R \mid D).\Pr(D)}{\Pr(R)} = \frac{10(20)}{4650} = \frac{200}{4650} = 0.0430$$

**MQI 2003 – ESTATÍSTICA PARA METROLOGIA - SEMESTRE 2008.01**

**Profa. Mônica Barros**

**Definições Básicas**
**Eventos mutuamente exclusivos – a probabilidade da sua interseção é o conjunto vazio**
**Eventos independentes (definição para 2 eventos) - a probabilidade da sua interseção é o produto das suas probabilidades**

**Definição axiomática de probabilidade**

i) $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo $A \subseteq S$

ii) $P(S) = 1$

iii) $P(A1 \cup A2 \cup A3 \cup .....) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + ...$ onde os Ai são mutuamente exclusivos.

Em particular, de iii) segue que: $P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$ se A1 e A2 forem mutuamente exclusivos

**Da definição de probabilidade segue que:**

iv) $P(\emptyset) = 0$

v) Para todo $A \subseteq S$, $P(A^c) = 1 - P(A)$ onde $A^c$ é o complemento de A

vi) Para todo $A \subseteq S$, $0 \leq P(A) \leq 1 = P(S)$

vii) Para quaisquer A1 e A2 em S tais que $A1 \subseteq A2$ então $P(A1) \leq P(A2)$

**Lei da Adição**

- Para quaisquer A1 e A2 em S:
- $Pr(A1 \cup A2) = Pr(A1) + Pr(A2) - Pr(A1 \cap A2)$

**Partição do Espaço Amostral**

B1, B2, ..., Bk formam uma partição de S se a união dos Bk´s é S e se os Bk´s são todos mutuamente exclusivos. Se B1, B2, ..., Bk formam uma partição de S e A é um evento qualquer em S então: $A = (A \cap B1) \cup (A \cap B2) \cup (A \cap B3) \cup ..... (A \cap Bk)$. Mas, os $(A \cap Bi)$ são mutuamente exclusivos e então: $\mathbf{Pr(A) = Pr(A \cap B1) + Pr(A \cap B2) + Pr(A \cap B3) + ..... + Pr(A \cap Bk)}$

**Probabilidade Condicional**

$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ desde que $P(B)$ seja $> 0$

Analogamente,

$P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ desde que $P(A)$ seja $> 0$

**Teorema da Multiplicação**

$\mathbf{P(A \cap B) = P(B \mid A) . P(A) = P(A \mid B). P(B)}$

Daí:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}$$

**Teorema da Probabilidade Total**

Considerando a partição B1, B2, ..., Bk e um evento A qualquer em S, $Pr(A \cap Bi) = Pr(Bi).Pr(A|Bi)$ para i =1, 2, ...., k. Então:

$\mathbf{Pr(A) = Pr(B1).Pr(A|B1) + Pr(B2).Pr(A|B2) + ..... + Pr(Bk).Pr(A|Bk)}$

**Teorema de Bayes**

"Mistura" os teoremas da multiplicação e da probabilidade total. Sejam B1, B2 , ...., Bk uma partição de S e A um evento qualquer em S. Então:

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\sum_{j=1}^{k} \Pr(A \mid B_j)\Pr(B_j)} = \frac{\Pr(A \mid B_i)\Pr(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} \Pr(A \mid B_j)\Pr(B_j)}$$

Para qualquer evento Bi na partição e qualquer A.

**Amostragem COM e SEM reposição**
Nos dois casos:
População tem r objetos do tipo I e N-r objetos do tipo II, num total de N objetos (tamanho da população). A amostra tem tamanho n, dos quais x elementos são do tipo I e n-x do tipo II.

A probabilidade de exatamente x objetos do tipo I na amostra SEM reposição é:

$$\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{onde} \quad \begin{aligned} \binom{N}{n} &= \frac{N!}{n!(N-n)!} \\ \binom{r}{x} &= \frac{r!}{x!(r-x)!} \\ \binom{N-r}{n-x} &= \frac{(N-r)!}{(n-x)!(N-n-(r-x))!} \end{aligned}$$

E na amostra COM reposição é:

$$\binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x} = \frac{\text{n!}}{\text{x!(n-x)!}} p^x.(1-p)^{n-x} \quad \text{para } x = 0,1,2,...,n$$

Onde p = r/N é a proporção de objetos do tipo I na amostra (que é mantida fixa).

**Função de Probabilidade**

**É uma função que associa a cada possível valor de uma variável aleatória discreta a sua probabilidade de ocorrência.**

f(x) = Pr(X = x) é uma função de probabilidade se:

$$\Pr(X = x) = f(x) \geq 0 \quad \text{para todo x}$$

$$\sum_{\text{todo x}} \Pr(X = x) = \sum_{\text{todo x}} f(x) = 1$$

**Função Densidade de Probabilidade**

Serve para calcular probabilidades para variáveis contínuas. Deve satisfazer:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para todo x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

**Função de Distribuição (F(x))**

1) F(x) = Pr(X ≤ x)
2) 0 ≤ F (x) ≤ 1
3) F(x) é uma função não decrescente
4) Lim F(x) = 1 se x →+∞
5) Lim F(x) = 0 se x → -∞
6) Se X é uma v.a. contínua, F(x) é contínua. Se X é discreta, F(x) é descontínua

**Relação entre densidade e função de distribuição**

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

| Nome | Densidade ou Função de Probabilidade | Média | Variância |
|---|---|---|---|
| Uniforme | $f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{se } a \leq x \leq b$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| Exponencial | $f(x) = \lambda.\exp(-\lambda.x) \quad \text{onde } \lambda > 0 \text{ e } x \geq 0$ | 1/λ | $1/\lambda^2$ |
| Binomial | $f(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x(1-p)^{n-x}$ para $x = 0,1,2,...,n$ | n.p | n.p.q |
| Geométrica | $f(n) = \Pr(X = n) = (1-p)^{n-1} p$ onde n = 1, 2, 3, ..... | 1/p | $q/p^2$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Poisson | $\Pr(X=x)=f(x)=\dfrac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!}$ onde x = 0, 1, 2, .... | λ | λ |
| Binomial Negativa | $f(x)=\Pr(X=x)=\binom{x-1}{r-1}.p^r.q^{x-r}$ onde x = r, r + 1, r + 2, ..... | r/p | $r.q/p^2$ |

**Resultados Matemáticos**

Série Geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1+a+a^2+a^3+.....=\frac{1}{1-a} \text{ desde que } |a|<1$$

Teorema Binomial

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \quad \text{onde a e b são número reais e k, n são inteiros} \geq 0$$

Série de Taylor da Exponencial

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^k}{k!}+......$$

***Definição: k-ésimo momento***

$$E(X^k)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} x^k.f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} x^k.f(x)=\sum_{\text{todo x}} x^k.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

***Definição: Média ou Valor Esperado de X***

$$\mu=E(X)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} x.f(x)=\sum_{\text{todo x}} x.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

***Definição: k-ésimo momento central***

$$E\left((X-\mu)^k\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k.f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k.f(x)=\sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Em particular, se k = 1: E(X – μ) = 0, ou seja, o primeiro momento central é sempre nulo.

***Definição: Variância***

$$\sigma^2=VAR(X)=E\left((X-\mu)^2\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2.f(x)dx & \text{se X contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2.f(x)=\sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2.\Pr(X=x) & \text{se X discreta}\end{cases}$$

**Fórmula alternativa para o cálculo da variância**

$$\sigma^2=VAR(X)=E(X^2)-\mu^2$$

***Definição: Valor esperado de uma função de uma variável aleatória***

$$E(u(X))=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} u(x).f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} u(x).f(x)=\sum_{\text{todo x}} u(x).\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

***Definição: Desvio padrão***

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{VAR(X)}$$

***Transformanção numa variável N(0,1)***

Transformação numa N(0,1)
Se X ~ N( μ , $\sigma^2$ ) então Z = (X – μ)/ σ é uma variável Normal com média 0 e variância 1.

***Tabela da N(0,1)***

Apresenta os valores de z e Φ(z) para z não negativos, onde Φ é a função de distribuição da N(0,1).

***Simetria da tabela da N(0,1)***

Φ(-z) = 1 - Φ(z) onde z é > 0

***Propriedades – Média e Variância de constantes e funções lineares***

Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer.

Então:

1-) $E(a.X + b) = a.E(X) + b$

2-) $E(a) = a$

3-) $VAR(a.X+ b) = a^2.VAR(X)$

4-) $VAR(a) = 0$

**Propriedade – linearidade do valor esperado:**

$E\{a.u(X) + b.v(X)\} = a\,E\,\{u(X)\} + b\,E\,\{v(X)\}$

## Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

| z | Φ(z) | | z | Φ (z) | | z | Φ (z) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0000 | 50,00% | | 1,0000 | 84,13% | | 2,0125 | 97,79% |
| 0,0200 | 50.80% | | 1,0100 | 84.38% | | 2.0200 | 97.83% |
| 0,0300 | 51.20% | | 1.0167 | 84.54% | | 2.0300 | 97.88% |
| 0,0400 | 51.60% | | 1.0250 | 84.73% | | 2.0400 | 97.93% |
| 0,0500 | 51,99% | | 1,0500 | 85,31% | | 2.0412 | 97.94% |
| 0,1000 | 53,98% | | 1,0553 | 85,44% | | 2.0500 | 97.98% |
| 0,1500 | 55,96% | | 1,1000 | 86,43% | | 2,1000 | 98,21% |
| 0,2000 | 57,93% | | 1,1180 | 86,82% | | 2,2000 | 98,61% |
| 0,2236 | 58,85% | | 1,1475 | 87,44% | | 2,2361 | 98,73% |
| 0,2500 | 59,87% | | 1,1500 | 87,49% | | 2,3000 | 98,93% |
| 0,3000 | 61,79% | | 1,1553 | 87,60% | | 2,3263 | 99,00% |
| 0,3015 | 61,85% | | 1,2000 | 88,49% | | 2,3333 | 99,02% |
| 0,3475 | 63,59% | | 1,2060 | 88,61% | | 2,4000 | 99,18% |
| 0,3492 | 63,65% | | 1,2200 | 88,88% | | 2,5000 | 99,38% |
| 0,3500 | 63,68% | | 1,2500 | 89,44% | | 2,5500 | 99,46% |
| 0,4000 | 65,54% | | 1.2700 | 89.79% | | 2,5628 | 99,48% |
| 0.4167 | 66.16% | | 1,2816 | 90,00% | | 2,6000 | 99,53% |
| 0,4307 | 66,67% | | 1,3000 | 90,32% | | 2,6500 | 99,60% |
| 0,4500 | 67,36% | | 1,3333 | 90,88% | | 2,6667 | 99,62% |
| 0,5000 | 69,15% | | 1,3750 | 91.54% | | 2,6833 | 99,64% |
| 0,5500 | 70,88% | | 1,4000 | 91,92% | | 2,7000 | 99,65% |
| 0,5774 | 71.81% | | 1,4468 | 92,60% | | 2.7500 | 99.70% |
| 0,6000 | 72,57% | | 1,4500 | 92,65% | | 2,8000 | 99,74% |
| 0,6250 | 73,40% | | 1,5000 | 93,32% | | 2,9000 | 99,81% |
| 0,6500 | 74,22% | | 1,5500 | 93,94% | | 2,9500 | 99,84% |
| 0,6667 | 74,75% | | 1,5811 | 94,31% | | 3,0000 | 99,87% |
| 0,6708 | 74,88% | | 1,6000 | 94,52% | | 3,1000 | 99,90% |
| 0,7000 | 75,80% | | 1,6450 | 95,00% | | 3,1500 | 99,92% |
| 0,7500 | 77,34% | | 1,6667 | 95,22% | | 3,2000 | 99,93% |
| 0,8000 | 78,81% | | 1,7000 | 95,54% | | | |
| 0,8333 | 79.77% | | 1,8000 | 96,41% | | | |
| 0,8416 | 80.00% | | 1.8500 | 96.78% | | | |
| 0,8500 | 80,23% | | 1,9000 | 97,13% | | | |
| 0.8666 | 80.69% | | 1.9500 | 97.44% | | | |
| 0,8944 | 81,45% | | 1,9600 | 97,50% | | | |
| 0,9000 | 81,59% | | 1,9700 | 97,56% | | | |
| 0,9167 | 82,03% | | 1,9800 | 97,61% | | | |
| 0,9500 | 82,89% | | 1,9900 | 97,67% | | | |
| 0,9500 | 82,89% | | 2,0000 | 97,72% | | | |
| 0,9750 | 83,52% | | 2,0100 | 97,78% | | | |
| 0,9800 | 83,65% | | | | | | |
| 0,9900 | 83,89% | | | | | | |