MQI 2003 – ESTATÍSTICA PARA METROLOGIA - SEMESTRE 2008.01
Teste 2 – 07/07/2008
GABARITO

PROBLEMA 1

Sejam X e Y v.a. contínuas com densidade conjunta:

$$f(x,y) = cy^2 + 3xy \quad \text{onde } 0 \le x \le 1 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le 1$$

a) Encontre a constante c que faz desta expressão uma densidade.
b) Encontre a densidade marginal de X.
c) Encontre a densidade marginal de Y.
d) Encontre a densidade condicional de X dado Y = y.
e) Ache a média condicional de X dado Y = y.

Solução

a) A constante é encontrada através da integral dupla:

$$\int_0^1\int_0^1 (cy^2 + 3xy)dydx = \int_0^1 (\frac{c}{3} + \frac{3}{2}x)dx = \frac{c}{3} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{c}{3} + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow \frac{c}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow c = \frac{3}{4}$$

b) A marginal de X é:

$$\int_0^1 (\frac{3}{4}y^2 + 3xy)dy = \frac{6x}{4} + \frac{1}{4} \qquad 0 < x < 1$$

c) A marginal de Y é:

$$\int_0^1 (\frac{3}{4}y^2 + 3xy)dx = \frac{3y^2}{4} + \frac{6y}{4} \qquad 0 < y < 1$$

d) A condicional de X dado Y = y é:

$$f(X \mid Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\left(3y^2 + 12xy\right)/4}{\left(3y^2 + 6y\right)/4} = \frac{3y^2 + 12xy}{3y^2 + 6y} = \frac{y^2 + 4xy}{y^2 + 2y} = \frac{\text{y+4x}}{\text{y+2}} \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

e) A média condicional de X dado Y = y é:

$$E(X \mid Y = y) = \int_0^1 x\frac{y + 4x}{y + 2}\text{dx} = \frac{1}{y + 2}\left\{\frac{y}{2} + \frac{4}{3}\right\} = \frac{3y + 8}{6\left(y + 2\right)}$$

PROBLEMA 2

Você trabalha no departamento de marketing de uma empresa farmacêutica que acabou de lançar um remédio que auxilia na redução de peso. Numa amostra de 36 mulheres que tomaram o remédio, a perda de peso média em três meses foi de 8.4 kg, com desvio padrão 2.6 kg.

Para comparação, tomou-se uma outra amostra, de 26 mulheres, que só fizeram dieta. Nesta segunda amostra, a perda de peso média em três meses foi de 6.2 kg, com desvio padrão 2.4 kg.

Encontre um IC 95% para a diferença de perda de peso entre os dois grupos. Você pode concluir, com probabilidade 95% que o remédio qua a sua empresa está lançando é eficaz para a dieta?

Nota: suponha que as perdas de peso são variáveis Normais.

Solução

Para começar a resolver o problema, precisamos decidir qual IC usar. A forma do IC desejado é:

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} - bR, \overline{X} - \overline{Y} + bR\right) \text{ onde } R = \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{n+m-2}\right)}$$

O ponto percentual da densidade t é obtido da densidade com n+m-2 = 36+26-2 = 60 graus de liberdade. Na tabela da densidade t, este ponto para um IC 95% é: 2.00 (apenas para comparação, o mesmo percentil para a densidade N(0,1) é 1.96). O IC desejado é:

$$\left(8.4 - 6.2 \mp 2.R\right) = 2.2 \mp 2.R \quad \text{onde } R = \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{26}\right)\left(\frac{35(2.6)^2 + (25)(2.4)^2}{60}\right)} = \sqrt{0.4202} = 0.6482$$

$$\left(2.2 - 2 * 0.6482, 2.2 + 2 * 0.6482\right) = \left(0.9036, \quad 3.4964\right)$$

Note que o IC só inclui valores positivos, portanto a média de perda de peso com o remédio é superior à média sem o remédio, e o tratamento é eficaz.

PROBLEMA 3

Um país tem que decidir uma questão importante num referendo. Você trabalha numa empresa de pesquisas, e faz uma pesquisa de “boca de urna” para medir a proporção de eleitores que dizem ter votado a favor da questão no referendo, tentando inferir sobre a real proporção de eleitores na população favoráveis à tal proposta. A sua amostra tem 800 eleitores, dos quais 480 foram favoráveis à questão. Encontre um IC 90% aproximado para o valor verdadeiro de p, a proporção de eleitores na população favoráveis à proposta e diga se, com base nesta amostra, a população é ou não favorável à proposta.

Solução

A forma do IC aproximado para p é:

$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,,\ \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$ Onde $z_{1- /2}$ obtido da densidade N(0,1) tal que

Pr(Z < $z_{1- /2}$) = 1- /2

Neste caso:

$\hat{p} = \dfrac{480}{800} = 0.6$ e para um IC 90%, z = 1.645. Logo, o IC 90% para p é:

$$\left(0.60 - 1.645\sqrt{\frac{0.60(0.40)}{800}}, 0.60 + 1.645\sqrt{\frac{0.60(0.40)}{800}}\right) = (0.6 - 0{,}028, 0.6 + 0{,}028) = (0.572,\ 0.628)$$

Então, com base na nossa “boca de urna” pode-se inferir que a proposta será aprovada, pois o IC só inclui valores acima de 50%.

PROBLEMA 4

Considere uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição Geométrica(p), ou seja, a função de probabilidade é dada por:

$$\Pr(X = x) = f(x) = q^{x-1}p = (1-p)^{x-1}p \quad \text{para } x = 1,2,3.....$$

Encontre o estimador de máxima verossimilhança de p.

Solução

A verossimilhança é:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i - 1} p = (1-p)^{\sum x_i - n} p^n$$

A log-verossimilhança é:

$$l(p) = \ln L(p) = \left(\sum x_i - n\right)\log(1-p) + n\log(p)$$

Derivando em relação a p e igualando a zero temos:

$$\frac{\partial l}{\partial p} = -\frac{\sum x_i - n}{1-p} + \frac{n}{p} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\overline{X} - n}{1-p} = \frac{n}{p} \Leftrightarrow \frac{p}{1-p} = \frac{n}{n\overline{X} - n} \Leftrightarrow \frac{p}{1-p} = \frac{1}{\overline{X} - 1} \Leftrightarrow \hat{p}\overline{X} - \hat{p} = 1 - \hat{p}$$

$$\Leftrightarrow \hat{p}\overline{X} = 1 \Leftrightarrow \hat{p} = \frac{1}{\overline{X}} = \frac{n}{\sum X_i}$$

Definições Básicas
Eventos mutuamente exclusivos – a probabilidade da sua interseção é o conjunto vazio
Eventos independentes (definição para 2 eventos) - a probabilidade da sua interseção é o produto das suas probabilidades

Definição axiomática de probabilidade

i) $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo $A \subseteq S$

ii) $P(S) = 1$

iii) $P(A1 \cup A2 \cup A3 \cup .....) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + \ldots$ onde os Ai são mutuamente exclusivos.

Em particular, de iii) segue que: $P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$ se A1 e A2 forem mutuamente exclusivos

Da definição de probabilidade segue que:

iv) $P(\varnothing) = 0$

v) Para todo $A \subseteq S$, $P(A^c) = 1 - P(A)$ onde A^c é o complemento de A

vi) Para todo $A \subseteq S$, $0 \leq P(A) \leq 1 = P(S)$

vii) Para quaisquer A1 e A2 em S tais que $A1 \subseteq A2$ então $P(A1) \leq P(A2)$

Lei da Adição

- Para quaisquer A1 e A2 em S:
- $Pr(A1 \cup A2) = Pr(A1) + Pr(A2) - Pr(A1 \cap A2)$

Partição do Espaço Amostral

B1, B2, ..., Bk formam uma partição de S se a união dos Bk´s é S e se os Bk´s são todos mutuamente exclusivos. Se B1, B2, ..., Bk formam uma partição de S e A é um evento qualquer em S então: $A = (A \cap B1) \cup (A \cap B2) \cup (A \cap B3) \cup ..... (A \cap Bk)$. Mas, os $(A \cap Bi)$ são mutuamente exclusivos e então:

$Pr(A) = Pr(A \cap B1) + Pr(A \cap B2) + Pr(A \cap B3) + ...+ Pr(A \cap Bk)$

Probabilidade Condicional

$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ desde que P(B) seja > 0

Analogamente,

$P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ desde que P(A) seja > 0

Teorema da Multiplicação

$P(A \cap B) = P(B \mid A) . P(A) = P(A \mid B). P(B)$

Daí:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}$$

Teorema da Probabilidade Total

Considerando a partição B1, B2, ..., Bk e um evento A qualquer em S, $Pr(A \cap Bi) = Pr(Bi).Pr(A|Bi)$ para i =1, 2, ..., k. Então:

$Pr(A) = Pr(B1).Pr(A|B1) + Pr(B2).Pr(A|B2) + ... + Pr(Bk).Pr(A|Bk)$

Teorema de Bayes

"Mistura" os teoremas da multiplicação e da probabilidade total. Sejam B1, B2 , ..., Bk uma partição de S e A um evento qualquer em S. Então:

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\sum_{j=1}^{k} \Pr(A \mid B_j)\Pr(B_j)} = \frac{\Pr(A \mid B_i)\Pr(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} \Pr(A \mid B_j)\Pr(B_j)}$$

Para qualquer evento Bi na partição e qualquer A.

Amostragem COM e SEM reposição
Nos dois casos:
População tem r objetos do tipo I e N-r objetos do tipo II, num total de N objetos (tamanho da população). A amostra tem tamanho n, dos quais x elementos são do tipo I e n-x do tipo II.

A probabilidade de exatamente x objetos do tipo I na amostra SEM reposição é:

$$\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{onde} \quad \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \qquad \binom{r}{x} = \frac{r!}{x!(r-x)!} \qquad \binom{N-r}{n-x} = \frac{(N-r)!}{(n-x)!(N-n-(r-x))!}$$

E na amostra COM reposição é:

$$\binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x.(1-p)^{n-x} \quad \text{para } x = 0,1,2,...,n$$

Onde p = r/N é a proporção de objetos do tipo I na amostra (que é mantida fixa).

Função de Probabilidade

É uma função que associa a cada possível valor de uma variável aleatória discreta a sua probabilidade de ocorrência.

f(x) = Pr(X = x) é uma função de probabilidade se:

$$\Pr(X = x) = f(x) \geq 0 \quad \text{para todo x}$$

$$\sum_{\text{todo x}} \Pr(X = x) = \sum_{\text{todo x}} f(x) = 1$$

Função Densidade de Probabilidade

Serve para calcular probabilidades para variáveis contínuas. Deve satisfazer:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para todo x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Função de Distribuição (F(x))

1) F(x) = Pr(X ≤ x)
2) 0 ≤ F (x) ≤ 1
3) F(x) é uma função não decrescente
4) Lim F(x) = 1 se x →+∞
5) Lim F(x) = 0 se x → -∞
6) Se X é uma v.a. contínua, F(x) é contínua. Se X é discreta, F(x) é descontínua

Relação entre densidade e função de distribuição

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ se $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial	$f(x) = \lambda.\exp(-\lambda.x)$ onde $\lambda > 0$ e $x \geq 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Binomial	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x(1-p)^{n-x}$ para $x = 0,1,2,...,n$	n.p	n.p.q
Geométrica	$f(n) = \Pr(X = n) = (1-p)^{n-1} p$ onde n = 1, 2, 3, ...	1/p	q/p^2

Poisson	$\Pr(X=x)=f(x)=\dfrac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!}$ onde x = 0, 1, 2, ...	λ	λ
Binomial Negativa	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{x-1}{r-1}.p^r.q^{x-r}$ onde x = r, r + 1, r + 2, ...	r/p	$r.q/p^2$

Resultados Matemáticos
Série Geométrica $$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1+a+a^2+a^3+.....=\frac{1}{1-a} \text{ desde que } \lvert a\rvert<1$$
Teorema Binomial $$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \text{ onde a e b são número reais e k, n são inteiros} \geq 0$$
Série de Taylor da Exponencial $$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^k}{k!}+......$$

Definição: k-ésimo momento

$$E(X^k)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} x^k.f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} x^k.f(x)=\sum_{\text{todo x}} x^k.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Definição: Média ou Valor Esperado de X

$$\mu=E(X)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}} x.f(x)=\sum_{\text{todo x}} x.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Definição: k-ésimo momento central

$$E\left((X-\mu)^k\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^k.f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}}(x-\mu)^k.f(x)=\sum_{\text{todo x}}(x-\mu)^k.\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Em particular, se k = 1: $E(X-\mu)=0$, ou seja, o primeiro momento central é sempre nulo.

Definição: Variância

$$\sigma^2=VAR(X)=E\left((X-\mu)^2\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2.f(x)dx & \text{se X contínua}\\ \sum_{\text{todo x}}(x-\mu)^2.f(x)=\sum_{\text{todo x}}(x-\mu)^2.\Pr(X=x) & \text{se X discreta}\end{cases}$$

Fórmula alternativa para o cálculo da variância

$$\sigma^2=VAR(X)=E(X^2)-\mu^2$$

Definição: Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

$$E(u(X))=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}u(x).f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua}\\ \sum_{\text{todo x}}u(x).f(x)=\sum_{\text{todo x}}u(x).\Pr(X=x) & \text{se X é v.a. discreta}\end{cases}$$

Definição: Desvio padrão

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{VAR(X)}$$

Transformanção numa variável N(0,1)

Transformação numa N(0,1)
Se X ~ N(μ , σ^2) então Z = $(X-\mu)/\sigma$ é uma variável Normal com média 0 e variância 1.

Tabela da N(0,1)

Apresenta os valores de z e Φ(z) para z não negativos, onde Φ é a função de distribuição da N(0,1).

Simetria da tabela da N(0,1)

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ onde z é > 0

Propriedades – Média e Variância de constantes e funções lineares

Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer.

Então:

1-) E(a.X + b) = a.E(X) + b

2-) E(a) = a

3-) VAR(a.X+ b) = a^2.VAR(X)

4-) VAR(a) = 0

Propriedade – linearidade do valor esperado:

E{a.u(X) + b.v(X)} = a E {u(X)} + b E {v(X)}

Densidade Marginal de X

Seja f(x,y) a densidade conjunta de X e Y. Então a densidade marginal de X é obtida integrando-se a conjunta para todo Y (no caso continuo) ou somando-se para todo Y no caso discreto.

Densidade Marginal de Y

Analogamente, a marginal de Y é obtida integrando-se a conjunta para todo X.

No caso discreto as integrais acima são substituídas por somatórios.

Densidades Condicionais

f(x|Y=y) = {conjunta}/marginal de Y

f(y|X=x) = {conjunta}/marginal de X

Momentos Condicionais

São os momentos das densidades condicionais. Por exemplo, E(x|Y=y) é a media da densidade condicional f(x|Y=y), calculada integrando-se (ou somando-se) x vezes f(x|Y=y).

A **curva de regressão** é o gráfico da média condicional versus todos os valores da variável em que se está condicionando, por exemplo, o gráfico de E(x|Y=y) versus y.

Covariância entre X e Y

É uma medida da associação **linear** entre X e Y.

COV(X, Y) = E{ (X – μ_X).(Y-μ_Y) } = E(X.Y) – μ_x. μ_y onde μ_x e μ_y são, respectivamente, as médias de X e Y.

Coeficiente de Correlação entre X e Y

ρ = COV(X,Y)/{dp(X).dp(Y)} onde dp(X) e dp(Y) são os desvios padrão de X e Y respectivamente.

O coeficiente de correlação é uma medida adimensional que está sempre no intervalo [-1, +1] e só alcança –1 ou +1 quando a relação entre as duas variáveis for perfeitamente linear.

Independência

X e Y são variáveis independentes se a sua conjunta é o produto das marginais.

Se X e Y são independentes então eles são descorrelatados (ρ = 0) mas a recíproca **não é** verdadeira.

Teorema – Distribuição da Média e da Variância amostrais numa amostra Normal

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra da densidade N(μ, σ^2).

Sejam $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ a média amostral e $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ a variância amostral

Então $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ e $\frac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ e $\bar{X}$ e S^2 são independentes

Deste resultado deduz-se que:

$$E(S^2) = \sigma^2$$

$$VAR(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

A densidade t de Student – definição

Uma variável t com k graus de liberdade é obtida através de:

$T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}}$ onde Z e V são independentes, Z é N(0,1) e V é Qui-Quadrado com k graus de liberdade.

À medida que os graus de liberade da distribuição t crescem, ela se aproxima de uma N(0,1).

A distribuição t e amostras Normais
Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra da densidade $N(\mu, \sigma^2)$. Considere e média e variância amostrais como já definidas. Então:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \mu\right)}{S} \sim t_{n-1}$$

Estatística
Estimação Pontual – encontrar "chutes" (estimadores) para parâmetros desconhecidos.
Principais Métodos de Estimação
Método dos momentos
Método de máxima verossimilhança
Método dos mínimos quadrados

Método dos Momentos – a idéia é igualar os momentos amostrais aos momentos da distribuição ($E(X^k)$) tantas vezes quanto necessário até encontrar uma solução única para todos os parâmetros desconhecidos. Se apenas um parâmetro é desconhecido, basta fazer isso uma vez.

Função de Verossimilhança (L(θ))
A função de verossimilhança é a densidade conjunta encarada como função do parâmetro θ. Isto é: $L(\theta) = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_i, \theta\right)$
Log-verossimilhança (l(θ))
É o logaritmo na base e da verossimilhança.

Método da Máxima Verossimilhança
Consiste em achar um estimador que maximiza a verossimilhança (ou, de modo equivalente, a log-verossimilhança). Em geral, ele é encontrado por Cálculo, resolvendo-se a equação dl/dθ = 0, mas existem exceções, como a densidade Uniforme.

Definição (Estimador não tendencioso)
Seja T um estimador para o parâmetro θ de uma densidade f(x, θ). T é chamado de *não tendencioso* se E(T) = θ, do contrário T é dito tendencioso.

Definição (Erro Quadrático Médio)
O erro quadrático médio do estimador T é definido como: $MSE(T) = E\{ (T - \theta)^2 \} = VAR(T) + \{ BIAS(T)\}^2$ onde θ é o parâmetro que T pretende estimar, VAR(T) é a variância de T e BIAS(T) é a tendência ou viés de T, definido como BIAS(T) = E(T) - θ.

Método dos Momentos
Seja $E(X^k)$ o k-ésimo momento da distribuição (k =1,2,...).
Seja:

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \quad \text{o k-ésimo momento amostral}$$

Faça $E(X^k) = M_k$ para k = 1,2,....
Faça isto para quantos k's forem necessários até obter soluções únicas para os parâmetros desconhecidos

IC para média da Normal com variância conhecida

$$[\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Onde $z_{1-\alpha/2}$ obtido da densidade N(0,1) tal que $Pr(Z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$

IC para média da Normal com variância DESCONHECIDA

$$[\overline{X} - b\frac{S}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + b\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

O ponto b que aparece na definição do IC é obtido da distribuição t com n-1 graus de liberdade, e é tal que $Pr(T > b) = \alpha/2$. S acima é o desvio padrão amostral.

IC para a média de uma distribuição qualquer – GRANDES AMOSTRAS

$$\left(\overline{X} - z_{1-\alpha/2}.\frac{S}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + z_{1-\alpha/2}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

Onde $z_{1-\alpha/2}$ obtido da densidade N(0,1) tal que $Pr(Z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$ e S é o desvio padrão amostral.

IC para a variância da Normal

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{b}, \frac{(n-1)S^2}{a}\right)$$

onde a e b obtidos da densidade Qui-quadrado com (n-1) graus de liberdade, e $Pr(X<a) = \alpha/2 = Pr(X > b)$ onde X é a variável Qui-quadrado

IC para a diferença das médias de DUAS amostras Normais com variâncias supostas IGUAIS

Amostra 1: $X_1, X_2, ..., X_m$ iid $N\left(\mu_1, \sigma^2\right)$

Amostra 2: $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ iid $N\left(\mu_2, \sigma^2\right)$

O IC 100(1-α)% para $\mu_1 - \mu_2$ é:

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} - bR, \overline{X} - \overline{Y} + bR\right) \text{ onde: } R = \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{n+m-2}\right)}$$

b é obtido a partir da distribuição t com n+m-2 graus de liberdade tal que $Pr(T > b) = \alpha/2$.

IC aproximado para a probabilidade Binomial

$$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \ \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Onde $z_{1-\alpha/2}$ obtido da densidade N(0,1) tal que $Pr(Z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0,0000	50,00%		1,0000	84,13%		2,0125	97,79%
0,0200	50.80%		1,0100	84.38%		2.0200	97.83%
0,0300	51.20%		1.0167	84.54%		2.0300	97.88%
0,0400	51.60%		1.0250	84.73%		2.0400	97.93%
0,0500	51,99%		1,0500	85,31%		2.0412	97.94%
0,1000	53,98%		1,0553	85,44%		2.0500	97.98%
0,1500	55,96%		1,1000	86,43%		2,1000	98,21%
0,2000	57,93%		1,1180	86,82%		2,2000	98,61%
0,2236	58,85%		1,1475	87,44%		2,2361	98,73%
0,2500	59,87%		1,1500	87,49%		2,3000	98,93%
0,3000	61,79%		1,1553	87,60%		2,3263	99,00%
0,3015	61,85%		1,2000	88,49%		2,3333	99,02%
0,3475	63,59%		1,2060	88,61%		2,4000	99,18%
0,3492	63,65%		1,2200	88,88%		2,5000	99,38%
0,3500	63,68%		1,2500	89,44%		2,5500	99,46%
0,4000	65,54%		1.2700	89.79%		2,5628	99,48%
0.4167	66.16%		1,2816	90,00%		2,6000	99,53%
0,4307	66,67%		1,3000	90,32%		2,6500	99,60%
0,4500	67,36%		1,3333	90,88%		2,6667	99,62%
0,5000	69,15%		1,3750	91.54%		2,6833	99,64%
0,5500	70,88%		1,4000	91,92%		2,7000	99,65%
0,5774	71.81%		1,4468	92,60%		2.7500	99.70%
0,6000	72,57%		1,4500	92,65%		2,8000	99,74%
0,6250	73,40%		1,5000	93,32%		2,9000	99,81%
0,6500	74,22%		1,5500	93,94%		2,9500	99,84%
0,6667	74,75%		1,5811	94,31%		3,0000	99,87%
0,6708	74,88%		1,6000	94,52%		3,1000	99,90%
0,7000	75,80%		1,6450	95,00%		3,1500	99,92%
0,7500	77,34%		1,6667	95,22%		3,2000	99,93%
0,8000	78,81%		1,7000	95,54%			
0,8333	79.77%		1,8000	96,41%			
0,8416	80.00%		1.8500	96.78%			
0,8500	80,23%		1,9000	97,13%			
0.8666	80.69%		1.9500	97.44%			
0,8944	81,45%		1,9600	97,50%			
0,9000	81,59%		1,9700	97,56%			
0,9167	82,03%		1,9800	97,61%			
0,9500	82,89%		1,9900	97,67%			
0,9500	82,89%		2,0000	97,72%			
0,9750	83,52%		2,0100	97,78%			
0,9800	83,65%						
0,9900	83,89%						

Pontos Percentuais

Variável t com p graus de liberdade

Exemplo

Se T tem densidade t com 12 graus de liberdade, Pr(T <= 1.782) = 95%

Graus de liberdade	60%	75%	80%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	0.325	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.697	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.695	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.684	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.256	0.682	0.853	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744
32	0.255	0.682	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.682	0.853	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.682	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.682	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.681	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
45	0.255	0.680	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
50	0.255	0.679	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	0.254	0.679	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660

Tabela da Função de Distribuição da densidade Qui-quadrado

Cada célula desta tabela contém Pr(X <= x) com as probabilidades especificadas em cada coluna.

Exemplo
Se X tem densidade Qui-quadrado com 12 graus de liberdade, Pr(X <= 8.438)= 0.25

probabilidade → / graus de liberdade ↓	0.5%	1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	25.0%	50.0%	75.0%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.341	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.340	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	12.340	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165	13.339	17.117	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.037	14.339	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912	15.338	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.792	16.338	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	13.675	17.338	21.605	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	14.562	18.338	22.718	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	15.452	19.337	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	16.344	20.337	24.935	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	17.240	21.337	26.039	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	18.137	22.337	27.141	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	19.037	23.337	28.241	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	19.939	24.337	29.339	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	20.843	25.336	30.435	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	21.749	26.336	31.528	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	22.657	27.336	32.620	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	23.567	28.336	33.711	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	24.478	29.336	34.800	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	25.390	30.336	35.887	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	26.304	31.336	36.973	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	27.219	32.336	38.058	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	28.136	33.336	39.141	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	29.054	34.336	40.223	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	29.973	35.336	41.304	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	30.893	36.336	42.383	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	31.815	37.335	43.462	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	32.737	38.335	44.539	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660	39.335	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766