IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2008.02
Teste 1 – 18/09/2008
Nome: GABARITO

FOLHA DE RESPOSTAS – PREENCHA A CANETA E NÃO RASURE!!!
Em cada um dos problemas, marque a resposta que você acha certa e depois transcreva para a folha de respostas. O formulário está no final da prova.

PROBLEMA 1 (20 pontos)

	A	B	C	D
Item A			■	
Item B			■	
Item C	■			

PROBLEMA 2 (20 pontos)

	A	B	C	D
Item A			■	
Item B				■
Item C			■	

PROBLEMA 3 (20 pontos)

	A	B	C	D
Item A			■	
Item B		■		

PROBLEMA 4 (20 pontos)

	A	B	C	D
Item A		■		
Item B	■			

PROBLEMA 5 (20 pontos)

	A	B	C	D
Item A	■			
Item B			■	
Item C			■	

Problema 1

Numa pesquisa eleitoral recente (IBOPE, 15/09/2008), se o segundo turno das eleições municipais no Rio fosse entre Crivella e Eduardo Paes, 30% dos eleitores declararam que votariam em Crivella, 43% em Paes, 20% votariam nulo ou em branco e 7% ainda não sabem.

Você decide fazer uma enquete informal entre 10 dos seus amigos.
Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que exatamente 3 votem em Crivella, 4 em Paes, 2 nulo ou branco.

A	B	C	D
0.0227	0.4652	0.0326	NDA

b) De que exatamente 3 votem em Crivella e 4 em Paes.

A	B	C	D
0.0532	0.2826	0.0763	NDA

c) De que existam menos de 5 eleitores de Eduardo Paes na sua amostra informal.

A	B	C	D
0.5564	0.2224	0.7793	NDA

Solução

Sejam X_1, X_2, X_3, X_4 o número de eleitores de Crivella, Eduardo Paes, Brancos/Nulos e "não sabe" na sua amostra, respectivamente.

a) $$\Pr(X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 2, X_4 = 1) = \frac{10!}{3!4!2!1!}(0.30)^3(0.43)^4(0.20)^2(0.07)^1 = 0.0326$$

(ALTERNATIVA C)

b) Agora só existem 3 categorias de interesse, Crivella, Paes e "outros". Seja X_3 o número de "outros" (soma de "brancos e nulos" com "não sabe") na amostra. Então X_3 ocorre com probabilidade 0.27.

$$\Pr(X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 3) = \frac{10!}{3!4!3!}(0.30)^3(0.43)^4(0.27)^3 = 0.0763$$

(ALTERNATIVA C)

c) Agora só existe uma categoria de interesse (eleitores do Eduardo Paes) e todas as outras se reduzem a uma única categoria. A distribuição Multinomial se reduz à Binomial e podemos dizer que X, o número de cursos de eleitores do Eduardo Paes na amostra é uma variável Binomial com parâmetros n = 10 e p = 0.43. Desejamos encontrar Pr(X < 5) = Pr(X = 0) + Pr(X =1) + Pr(X = 2) + Pr(X=3) + Pr(X=4).

x	Pr(X=x)
0	**0.0036**
1	**0.0273**
2	**0.0927**
3	**0.1865**
4	**0.2462**
Pr(X<5)	**0.5564**

(ALTERNATIVA A)

Problema 2

80% dos viajantes a negócios carregam um notebook. Considere uma amostra de 20 viajantes a negócios que estão esperando numa fila de táxi do aeroporto.

a) Qual a probabilidade de exatamente 15 carregarem um notebook.

A	B	C	D
0.1091	0.1916	0.1746	NDA

b) Qual a probabilidade de mais de 4 **NÃO** carregarem notebook.

A	B	C	D
0.4114	0.6181	0.6296	NDA

c) Qual a probabilidade de mais de 15 carregarem um notebook.

A	B	C	D
0.4114	0.6181	0.6296	NDA

Solução

a) Seja X o número de viajantes a negócios carregando notebooks que estão esperando nesta fila de táxi. Então X é Binomial com n= 20 e p = 0.80.

Queremos achar Pr(X = 15)= $\binom{20}{15}(0.80)^{15}(0.20)^{5} = 0.1746$ **(ALTERNATIVA C)**

b) Neste caso é só pensar em Y, as pessoas que NÃO CARREGAM notebook. Y é também uma variável Binomial, com n = 20, mas com probabilidade de sucesso = q = 0.20 (o complemento de p). Queremos achar Pr(Y > 4) = Pr(Y = 5, 6, 7, ..., 20) = 1 – Pr(Y = 0, 1,2,3,4)

y	Pr(Y=y)
0	0.0115
1	0.0576
2	0.1369
3	0.2054
4	0.2182
Pr(Y<=4)	0.6296
Pr(Y>4)	0.3704

(ALTERNATIVA D)

c) A questão refere-se à variável Binomial do item a. Agora queremos saber a probabilidade de X ser maior que 15, ou seja, Pr(X=16, 17, 18, 19, 20).

x	Pr(X=x)
16	0.2182
17	0.2054
18	0.1369
19	0.0576
20	0.0115
Pr(X>15)	0.6296

(ALTERNATIVA C)

PROBLEMA 3

Uma pesquisa de opinião perguntou: qual esporte você prefere assistir? Os favoritos foram futebol e vôlei. Num grupo de 40 pessoas, 24 preferem assistir futebol e 16 vôlei.

a) Toma-se uma amostra de tamanho 10 destas pessoas. Qual a probabilidade de exatamente 5 preferirem assistir futebol.

A	B	C	D
0.621	0.521	0.219	NDA

b) Qual a probabilidade de, numa mesa de bar com 6 pessoas, cinco ou mais preferirem assistir futebol?

A	B	C	D
0.177	0.212	0.621	NDA

Solução

a) Seja X o número de pessoas na amostra que preferem futebol. Então:

$$\Pr(X=5)=\frac{\binom{24}{5}\binom{16}{5}}{\binom{40}{10}}=0.219$$ **(ALTERNATIVA C)**

b) Neste item queremos encontrar a probabilidade de, numa mesa com 6 pessoas, 5 ou mais (ou seja, 5 ou 6) preferirem futebol. Neste caso a amostra tem tamanho 6 e a probabilidade desejada é:

$$\Pr(X=5)+\Pr(X=6)=\frac{\binom{24}{5}\binom{16}{1}}{\binom{40}{6}}+\frac{\binom{24}{6}\binom{16}{0}}{\binom{40}{6}}=\frac{16\binom{24}{5}+\binom{24}{6}}{\binom{40}{6}}=0.212$$

(ALTERNATIVA B)

PROBLEMA 4

O número médio de pedidos de autorização para um certo exame médico complexo recebido por um plano de saúde é uma variável Poisson com parâmetro λ = 12.5 pedidos por hora.

a) Calcule a probabilidade de, num período de meia hora qualquer, a empresa receber mais de 5 pedidos de autorização para este exame.

A	B	C	D
0.4045	0.5936	0.4064	NDA

b) Calcule a probabilidade da empresa receber, em 15 minutos, 4 ou menos pedidos de autorização.

A	B	C	D
0.7938	0.2062	0.6193	NDA

Solução

a) Em meia hora, o número de pedidos recebidos é uma variável Poisson com λ = 12.5/2 = 6.25. Queremos encontrar Pr(X > 5) = 1 – Pr(X <=5) = 1 – Pr(X=0, 1, 2, 3, 4, 5).

x	Pr(X=x)
0	0.0019
1	0.0121
2	0.0377
3	0.0786
4	0.1227
5	0.1534
Pr(X<=5)	0.4064
Pr(X>5)	0.5936

(ALTERNATIVA B)

b) Em 15 minutos, o número de pedidos recebidos é Poisson com λ = 12.5/4 = 3.125. Queremos achar Pr(X <=4).

x	Pr(X=x)
0	0.0439
1	0.1373
2	0.2145
3	0.2235
4	0.1746
Pr(X<=4)	0.7938

(ALTERNATIVA A)

PROBLEMA 5

Você passou no vestibular para uma universidade federal e agora tem que enfrentar o “trote” dos calouros. Sua tarefa é ficar pedindo dinheiro no sinal para a “choppada” dos calouros.

Suponha que a probabilidade de um motorista qualquer dar dinheiro para a “choppada” é 8%.

a) Qual a probabilidade de você ter que abordar exatamente 20 carros até que um te dê dinheiro para a “choppada”?

A	B	C	D
0.0164	0.0151	0.0178	NDA

b) Qual a probabilidade de você ter que abordar 30 carros até que dois te dêem dinheiro?

A	B	C	D
0.165	0.180	0.0180	NDA

c) Em média, quantos carros você terá que abordar até que 4 te dêem dinheiro?

A	B	C	D
40	25	50	NDA

Solução

a) A probabilidade desejada é a da seqüência com 19 "falhas" e, em seguida, um "sucesso", que tem probabilidade: $(0.92)^{19}(0.08) = 0.0164$ **(ALTERNATIVA A)**

b) Agora trata-se de um problema da Binomial Negativa com r = 2. Você quer saber a probabilidade de serem necessárias X = 30 repetições até alcançar o segundo sucesso.

$$\Pr(X = 30) = \binom{29}{1}(0.08)^2(0.92)^{28} = 29(0.08)^2(0.92)^{28} = 0.0180$$

(ALTERNATIVA C)

c) Aqui precisamos apenas saber a média de uma variável Binomial Negativa, que é r/p. Neste caso r = 4 e p continua sendo 0.08 e portanto E(X) = 4/0.08 = 50
(ALTERNATIVA C)

IND 1115 - Inferência Estatística
Profa. Mônica Barros
FORMULÁRIO P1

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância	fgm
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{se } a \le x \le b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Não é útil
Exponencial	$f(x) = \lambda.\exp(-\lambda.x) \quad \text{onde } \lambda > 0 \text{ e } x \ge 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)$ se $t < \lambda$
Gama	$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha . x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.e^{-\beta x}, \text{ onde x} \ge 0 \\ 0 \text{ se x } < 0 \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$ se $t < \beta$
Qui-Quadrado	$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}$	n	2n	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ se $t < 1/2$
Binomial	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$ para $x = 0, 1, 2, \ldots, n$	n.p	n.p.q	$(pe^t + q)^n$
Hipergeométrica	$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n.\left(\frac{r}{N}\right)$	$n.\left(\frac{r}{N}\right)\left(1 - \frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	Não é útil
Geométrica	$f(n) = \Pr(X = n) = (1-p)^{n-1} p$ onde n = 1, 2, 3, ...	1/p	q/p^2	$M(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$
Poisson	$\Pr(X = x) = f(x) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!}$ onde x = 0, 1, 2, ...	λ	λ	$E(e^{tX}) = e^{\lambda.(e^t - 1)}$
Binomial Negativa	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{x-1}{r-1}.p^r.q^{x-r}$ onde x = r, r + 1, r + 2, ...	r/p	$r.q/p^2$	$M(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - qe^t}\right)^r$
Multinomial	$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$	$E(X_i) = n.p_i$	$VAR(X_i) = n.p_i.(1-.p_i)$ $COV(X_i, X_j) = -n.p_i.p_j$	Os X´s não são independentes e seguem a restrição: soma dos X_i´s = n. Analogamente, a soma dos p_i´s é igual a 1

Resultados Matemáticos
Série Geométrica $$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots.. = \frac{1}{1-a} \text{ desde que } \lvert a \rvert < 1$$
Teorema Binomial

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$	onde a e b são número reais e k, n são inteiros ≥ 0
Série de Taylor da Exponencial	$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} \right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^k}{k!} + ...$

Função de Distribuição (F(x))

1) F(x) = Pr(X ≤ x)
2) 0 ≤ F (x) ≤ 1
3) F(x) é uma função não decrescente
4) Lim F(x) = 1 se x →+∞
5) Lim F(x) = 0 se x → -∞

Se X é uma v.a. contínua, F(x) é contínua. Se X é discreta, F(x) é descontínua

Relação entre densidade e função de distribuição

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Definição: k-ésimo momento

$$E(X^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k . f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} x^k . f(x) = \sum_{\text{todo x}} x^k . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: Média ou Valor Esperado de X

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x . f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} x . f(x) = \sum_{\text{todo x}} x . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: k-ésimo momento central

$$E((X-\mu)^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k . f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k . f(x) = \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Em particular, se k = 1: E(X – μ) = 0, ou seja, o primeiro momento central é sempre nulo.

Definição: Variância

$$\sigma^2 = VAR(X) = E\left((X-\mu)^2 \right) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 . f(x) dx & \text{se X contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2 . f(x) = \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2 . \Pr(X = x) & \text{se X discreta} \end{cases}$$

Fórmula alternativa para o cálculo da variância

$$\sigma^2 = VAR(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Definição: Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

$$E(u(X)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) . f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} u(x) . f(x) = \sum_{\text{todo x}} u(x) . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{VAR(X)}$$

Propriedades – Média e Variância de constantes e funções lineares

Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer. Então:

1-) E(a.X + b) = a.E(X) + b

2-) E(a) = a

3-) VAR(a.X+ b) = a^2.VAR(X)

4-) VAR(a) = 0

Propriedade – linearidade do valor esperado:

E{a.u(X) + b.v(X)} = a E {u(X)} + b E {v(X)}

Poisson como aproximação da Binomial

Se X é Binomial(n, p), onde n é grande e p é pequeno (n > 20 e n.p < 5), pode-se aproximar as probabilidades Binomiais por probabilidades Poisson usando uma Poisson com a mesma média, isto é, usando λ = n.p.

Função Geradora de Momentos (fgm)

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} e^{tx}.f(x) = \sum_{\text{todo x}} e^{tx}.\Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Relação entre Momentos e fgm

$$M^{(k)}(0) = \left.\frac{d^k M(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = E(X^k)$$