

IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2008.02

Teste 2 – 04/11/2008

Nome: _____

FOLHA DE RESPOSTAS – PREENCHA A CANETA E NÃO RASURE!!!

Nos problemas de múltipla escolha, marque com um X na folha de respostas a alternativa que você considera correta. O formulário está no final da prova.

PROBLEMA 1 (40 pontos)

	A	B	C	D
Item 1				
Item 2				
Item 3				
Item 4				
Item 5				
Item 6				
Item 7				
Item 8				

Todos os itens da questão valem 5 pontos

PROBLEMA 2 (40 pontos)

	A	B	C	D
Item 1				
Item 2 (10 pontos)				
Item 3 (10 pontos)				
Item 4				
Item 5				
Item 6				

Os outros itens da questão valem 5 pontos cada.

PROBLEMA 3 (20 pontos)

	A	B	C	D
Item 1				

Problema 1 (40 pontos)

O retorno diário de um certo ativo financeiro é uma v.a. Normal com média 1% e desvio padrão 4%.

- 1) Qual a probabilidade de, num certo dia, o retorno deste ativo ultrapassar 3%?
- 2) Qual a probabilidade de, num certo dia, o retorno do ativo ser inferior a -3%?
- 3) A partir de quanto o ativo deve render num dia para que possamos dizer que estamos num dos 10% dos dias mais rentáveis?
- 4) Abaixo de quanto deve ser o retorno diário para que estejamos num dos 5% piores dias?
- 5) E abaixo de quanto deve ser o retorno diário para que estejamos num dos 1% piores dias?

Toma-se uma amostra de 25 dias úteis, e supõe-se que os retornos diários são todos independentes e identicamente distribuídos nestes dias.

- 6) Qual a probabilidade do retorno médio neste período de 25 dias exceder 1.16%?
- 7) Qual a probabilidade do maior retorno neste período de 25 dias exceder 6%?
- 8) Qual a probabilidade do menor retorno neste período de 25 dias ser menor que -5%?

Respostas

	A	B	C	D
Item 1	0.2266	0.1587	0.6915	0.3085
Item 2	0.1587	0.3085	0.6915	0.8413
Item 3	10.31%	5.15%	6.13%	5.58%
Item 4	-5.58%	-5.15%	-6.13%	-8.31%
Item 5	-5.58%	-8.31%	-5.15%	-6.13%
Item 6	0.4840	0.4207	0.5160	NDA
Item 7	0.9387	0.8944	0.1056	0.0613
Item 8	0.9332	0.8225	0.0668	0.1775

PROBLEMA 2 (40 pontos)

Você quer montar um portfólio com dois ativos que têm as seguintes características:

Ativo A: retorno médio = 3.6%, d.p. retorno = 8%

Ativo B: retorno médio = 1.2%, d.p. retorno = 3%

Suponha o caso mais geral, onde os dois ativos têm uma correlação ρ qualquer.

Seja w a proporção do ativo A no portfólio.

1) O retorno médio do portfólio é (em percentual): **(5 pontos)**

A	B	C	D
$1.2 + 2.4w$	$1.2 + 3.6w$	$2.4w + 1.2 - 2.(3.6)(1.2)w(1-w)\rho$	$2.4w + 1.2 + 2.(3.6)(1.2)w(1-w)\rho$

2) A variância do portfólio é 10^4 vezes a seguinte expressão: **(10 pontos)**

A	B	C	D
$73w^2 - 18w + 9$	$73w^2 - 48\rho w^2 - w(18-48\rho) + 9$	$73w^2 + 48\rho w^2 - w(18+48\rho) + 9$	NDA

3) No caso geral, o peso (w) do ativo A que fornece o portfólio de variância mínima é: **(10 pontos)**

A	B	C	D
$\frac{9 - 24\rho}{73 + 48\rho}$	$\frac{9 - 24\rho}{73 - 48\rho}$	$\frac{9 + 24\rho}{73 + 48\rho}$	$\frac{9}{73 - 48\rho}$

4) Se $\rho = 0$ então: **(5 pontos)**

	A	B	C	D
w (portfólio de variância mínima)	0.1233	0.1233	0.1233	0.1854
Desvio padrão do portfólio de variância mínima	2.81%	2.81%	3.14%	2.59%
Desvio padrão do portfólio com pesos iguais para os dois ativos	4.27%	5.5%	5.5%	5.5%

5) Se $\rho = -0.2$ então: (5 pontos)

	A	B	C	D
w (portfolio de variância mínima)	0.1671	0.1671	0.1854	0.1854
Desvio padrão do portfolio de variância mínima	2.81%	2.59%	2.59%	2.81%
Desvio padrão do portfolio com pesos iguais para os dois ativos	3.98%	3.98%	3.83%	3.98%

6) Se $\rho = -0.3$ então: (5 pontos)

	A	B	C	D
w (portfolio de variância mínima)	0.1854	0.1854	0.1854	0.1854
Desvio padrão do portfolio de variância mínima	2.45%	2.59%	2.59%	2.45%
Desvio padrão do portfolio com pesos iguais para os dois ativos	3.98%	3.98%	3.83%	3.83%

PROBLEMA 3 (20 pontos)

Sejam X e Y variáveis Normais independentes, onde X tem média -1 e variância 4 e Y tem média -4 e variância 4.

Seja $W = 12\exp(4X - Y)$

Então a média de W é:

A	B	C	D
$12\exp(34)$	$12\exp(-4)$	$12\exp(26)$	NDA

Dica: Lembre-se da função geradora de momentos de uma variável Normal. Se Y é Normal (μ, σ^2) então sua fgm é: $M(t) = \exp(\mu \cdot t + \sigma^2 t^2 / 2)$

IND 1115 - Inferência Estatística

Profa. Mônica Barros

FORMULÁRIO P2

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância	fgm
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ se $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Não é útil
Exponencial	$f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x)$ onde $\lambda > 0$ e $x \geq 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)$ se $t < \lambda$
Gama	$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta x}, & \text{onde } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ se $t < \beta$
Qui-Quadrado	$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$	n	2n	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ se $t < 1/2$
Binomial	$f(x) = \Pr(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$ para $x = 0, 1, 2, \dots, n$	n.p	n.p.q	$(pe^t + q)^n$
Hipergeométrica	$f(x) = \Pr(X=x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n \cdot \left(\frac{r}{N}\right)$	$n \cdot \left(\frac{r}{N}\right) \left(1 - \frac{r}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	Não é útil
Geométrica	$f(n) = \Pr(X=n) = (1-p)^{n-1} p$ onde $n = 1, 2, 3, \dots$	$1/p$	q/p^2	$M(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$
Poisson	$\Pr(X=x) = f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$ onde $x = 0, 1, 2, \dots$	λ	λ	$E(e^{tx}) = e^{\lambda(e^t-1)}$
Binomial Negativa	$f(x) = \Pr(X=x) = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{x-r}$ onde $x = r, r+1, r+2, \dots$	r/p	$r \cdot q/p^2$	$M(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

Resultados Matemáticos

Série Geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{1}{1-a} \text{ desde que } |a| < 1$$

Teorema Binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são número reais e } k, n \text{ são inteiros } \geq 0$$

Série de Taylor da Exponencial

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

Função de Distribuição (F(x))

- 1) $F(x) = \Pr(X \leq x)$
- 2) $0 \leq F(x) \leq 1$
- 3) $F(x)$ é uma função não decrescente
- 4) $\lim F(x) = 1$ se $x \rightarrow +\infty$

Relação entre densidade e função de distribuição

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ se $x \rightarrow -\infty$

Se X é uma v.a. contínua, $F(x)$ é contínua. Se X é discreta, $F(x)$ é descontínua

Definição: k-ésimo momento

$$E(X^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} x^k \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} x^k \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: Média ou Valor Esperado de X

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} x \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} x \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: k-ésimo momento central

$$E((X - \mu)^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^k \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^k \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: Variância

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E((X - \mu)^2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ discreta} \end{cases}$$

Em particular, se $k = 1$: $E(X - \mu) = 0$, ou seja, o primeiro momento central é sempre nulo.

Fórmula alternativa para o cálculo da variância

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(u(X)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} u(x) \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} u(x) \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\text{VAR}(X)}$$

Definição: Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

Propriedades – Média e Variância de constantes e funções lineares

Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer.

Então:

1-) $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$

2-) $E(a) = a$

3-) $\text{VAR}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \text{VAR}(X)$

4-) $\text{VAR}(a) = 0$

Propriedade – linearidade do valor esperado:

$$E\{a \cdot u(X) + b \cdot v(X)\} = a \cdot E\{u(X)\} + b \cdot E\{v(X)\}$$

Poisson como aproximação da Binomial

Se X é Binomial(n, p), onde n é grande e p é pequeno ($n > 20$ e $n \cdot p < 5$), pode-se aproximar as probabilidades Binomiais por probabilidades Poisson usando uma Poisson com a mesma média, isto é, usando $\lambda = n \cdot p$.

Combinações Lineares de variáveis INDEPENDENTES

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n independentes com médias $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ e variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$.

Seja: $Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$

Função Geradora de Momentos (fgm)

$$M(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} e^{tx} \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} e^{tx} \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Relação entre Momentos e fgm

$$M^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k M(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = E(X^k)$$

A variância de Y é:

$$\text{VAR}(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \text{VAR}(X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sigma_i^2$$

onde $\text{VAR}(X_i) = \sigma_i^2$

E a fgm de Y é:

Então, a **média de Y** é:

$$E(Y) = E\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) =$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \quad \text{onde } \mu_i = E(X_i)$$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{t(a_0 + a_1 X_1 + \dots + a_n X_n)}\right)$$

$$= E\left(e^{ta_0} e^{ta_1 X_1} \dots e^{ta_n X_n}\right) =$$

$$= e^{ta_0} E\left(e^{ta_1 X_1} \dots e^{ta_n X_n}\right)$$

e como consequência da independência

$$= e^{ta_0} E\left(e^{ta_1 X_1}\right) E\left(e^{ta_2 X_2}\right) \dots E\left(e^{ta_n X_n}\right) =$$

$$e^{ta_0} M_{X_1}(ta_1) M_{X_2}(ta_2) \dots M_{X_n}(ta_n)$$

Combinações Lineares de variáveis DEPENDENTES

Suponha que as médias e variâncias dos X_i 's são como no caso anterior, mas agora eles são DEPENDENTES, de tal forma que: $COV(X_i, X_j) = COV(X_j, X_i) = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$ onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre X_i e X_j .
Seja Y definido como acima.

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

Então $E(Y)$ é o mesmo que no caso de variáveis dependentes, MAS:

$$VAR(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 VAR(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j COV(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad \text{onde no 2o. termo } i \neq j$$

onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre X_i e X_j

Portfolio

Combinação linear de ativos onde soma dos pesos = 1. Nos nossos exemplos estamos supondo que todos os pesos são positivos.

A média e a variância do portfolio podem ser obtidas diretamente das expressões acima para combinações lineares de variáveis dependentes. NOTAR que, acima no termo da covariância aparecem $a_i a_j$ e $a_j a_i$.

Função Gama

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} dt$$

Propriedades da Função Gama

- 1) $\Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1)$ para $n > 1$
- 2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ se n é inteiro > 1
- 3) $\Gamma(1) = 0! = 1$
- 4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Padronização de uma variável aleatória

Se X tem média a e variância b^2 então $Z = (X-a)/b$ tem média 0 e variância 1. Se, além disso, X é Normal, Z também é Normal.

Cálculo de probabilidades para variáveis Normais

Se X é uma variável Normal com média μ e desvio padrão σ então:

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \Pr\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Simetria da tabela da N(0,1)

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ se $z > 0$

Combinações Lineares de Variáveis Normais

- Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes, onde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ e seja $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
- Então Y tem distribuição Normal com média μ_y e variância σ_y^2 dadas por:

$$\mu_y = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \text{e} \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Casos particulares: se todos os X_i 's acima são iid com média μ e variância σ^2 então a soma é Normal com média $n \cdot \mu$ e variância $n \cdot \sigma^2$ e a média amostral é Normal com média μ e variância σ^2/n .

Densidade Lognormal

Se X é $N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = e^X$ é Lognormal. Pode-se provar que $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ e

$$VAR(Y) = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$$

Teorema – Relação entre Unif(0,1) e Beta

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com densidade Unif(0,1). Seja Y_r o r-ésimo número ordenado dentre os valores observados de X_1, X_2, \dots, X_n (Por exemplo, Y_1 é o menor dentre os X_i 's, Y_2 é o 2o menor, ..., Y_n é o maior deles). Então Y_r tem densidade Beta com parâmetros r e $n-r+1$.

Densidade Beta

$$f(x) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m-1} (1-x)^{n-1} \quad \text{onde } 0 < x < 1 \text{ e } m, n \text{ inteiros } \geq 1$$

Se $X \sim \text{Beta}(m, n)$ então:

$$E(X) = \frac{m}{m+n}$$

$$\text{VAR}(X) = \frac{mn}{(m+n+1)(m+n)^2}$$

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(k+m)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(k+m+n)}$$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	$\Phi(z)$		z	$\Phi(z)$		z	$\Phi(z)$
0,0000	50,00%		1,0000	84,13%		2,0125	97,79%
0,0200	50,80%		1,0100	84,38%		2,0200	97,83%
0,0300	51,20%		1,0167	84,54%		2,0300	97,88%
0,0400	51,60%		1,0250	84,73%		2,0400	97,93%
0,0500	51,99%		1,0500	85,31%		2,0412	97,94%
0,1000	53,98%		1,0553	85,44%		2,0500	97,98%
0,1500	55,96%		1,1000	86,43%		2,1000	98,21%
0,2000	57,93%		1,1180	86,82%		2,2000	98,61%
0,2236	58,85%		1,1475	87,44%		2,2361	98,73%
0,2500	59,87%		1,1500	87,49%		2,3000	98,93%
0,3000	61,79%		1,1553	87,60%		2,3263	99,00%
0,3015	61,85%		1,2000	88,49%		2,3333	99,02%
0,3475	63,59%		1,2060	88,61%		2,4000	99,18%
0,3492	63,65%		1,2200	88,88%		2,5000	99,38%
0,3500	63,68%		1,2500	89,44%		2,5500	99,46%
0,4000	65,54%		1,2700	89,79%		2,5628	99,48%
0,4167	66,15%		1,2816	90,00%		2,6000	99,53%
0,4307	66,67%		1,3000	90,32%		2,6500	99,60%
0,4500	67,36%		1,3333	90,88%		2,6667	99,62%
0,5000	69,15%		1,3750	91,54%		2,6833	99,64%
0,5500	70,88%		1,4000	91,92%		2,7000	99,65%
0,5774	71,81%		1,4468	92,60%		2,7500	99,70%
0,6000	72,57%		1,4500	92,65%		2,8000	99,74%
0,6250	73,40%		1,5000	93,32%		2,9000	99,81%
0,6500	74,22%		1,5500	93,94%		2,9500	99,84%
0,6667	74,75%		1,5811	94,31%		3,0000	99,87%
0,6708	74,88%		1,6000	94,52%		3,1000	99,90%
0,7000	75,80%		1,6450	95,00%		3,1500	99,92%
0,7500	77,34%		1,6667	95,22%		3,2000	99,93%
0,8000	78,81%		1,7000	95,54%			
0,8333	79,77%		1,8000	96,41%			
0,8500	80,23%		1,8500	96,78%			
0,8666	80,69%		1,9000	97,13%			
0,8944	81,45%		1,9500	97,44%			
0,9000	81,59%		1,9600	97,50%			
0,9167	82,03%		1,9800	97,61%			
0,9500	82,89%		2,0000	97,72%			
0,9500	82,89%		2,0100	97,78%			
0,9750	83,52%						
0,9800	83,65%						
0,9900	83,89%						