IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2008.02
Teste 2 – 04/11/2008
GABARITO

FOLHA DE RESPOSTAS – PREENCHA A CANETA E NÃO RASURE!!!
Nos problemas de múltipla escolha, marque com um X na folha de respostas a alternativa que você considera correta. O formulário está no final da prova.

PROBLEMA 1 (40 pontos)

	A	B	C	D
Item 1				X
Item 2	X			
Item 3			X	
Item 4	X			
Item 5		X		
Item 6		X		
Item 7	X			
Item 8		X		

Todos os itens da questão valem 5 pontos

PROBLEMA 2 (40 pontos)

	A	B	C	D
Item 1	X			
Item 2 (10 pontos)		X		
Item 3 (10 pontos)		X		
Item 4	X			
Item 5		X		
Item 6				X

Os outros itens da questão valem 5 pontos cada.

PROBLEMA 3 (20 pontos)

	A	B	C	D
Item 1	X			

Problema 1 (40 pontos)

O retorno diário de um certo ativo financeiro é uma v.a. Normal com média 1% e desvio padrão 4%.

1) Qual a probabilidade de, num certo dia, o retorno deste ativo ultrapassar 3%?

2) Qual a probabilidade de, num certo dia, o retorno do ativo ser inferior a -3%?

3) A partir de quanto o ativo deve render num dia para que possamos dizer que estamos num dos 10% dos dias mais rentáveis?

4) Abaixo de quanto deve ser o retorno diário para que estejamos num dos 5% piores dias?

5) E abaixo de quanto deve ser o retorno diário para que estejamos num dos 1% piores dias?

Toma-se uma amostra de 25 dias úteis, e supõe-se que os retornos diários são todos independentes e identicamente distribuídos nestes dias.

6) Qual a probabilidade do retorno médio neste período de 25 dias exceder 1.16%?

7) Qual a probabilidade do maior retorno neste período de 25 dias exceder 6%?

8) Qual a probabilidade do menor retorno neste período de 25 dias ser menor que -5%?

Respostas

	A	B	C	D
Item 1	**0.2266**	**0.1587**	**0.6915**	**0.3085**
Item 2	**0.1587**	**0.3085**	**0.6915**	**0.8413**
Item 3	**10.31%**	**5.15%**	**6.13%**	**5.58%**
Item 4	**-5.58%**	**-5.15%**	**-6.13%**	**-8.31%**
Item 5	**-5.58%**	**-8.31%**	**-5.15%**	**-6.13%**
Item 6	**0.4840**	**0.4207**	**0.5160**	**NDA**
Item 7	**0.9387**	**0.8944**	**0.1056**	**0.0613**
Item 8	**0.9332**	**0.8225**	**0.0668**	**0.1775**

Solução

X = retorno diário ~ N(1%, $(4\%)^2$)

1) Pr(X > 3%) = $\Pr\left(\frac{X-1}{4} > \frac{3-1}{4}\right) = \Pr(Z > 0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$

2) Pr(X < -3%) = $\Pr\left(\frac{X-1}{4} < \frac{-3-1}{4}\right) = \Pr(Z < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(+1) = 1 - 0.8413$

$= 0.1587$

3) Para ser um dias dentre os 10% mais rentáveis, a variável normalizada é z = 1.2816

Logo:

$$\frac{X-1\%}{4\%} = 1.2816 \Leftrightarrow X = 1\% + 4\%(1.2816) = 6.13\%$$

4) Para estar entre os 5% piores dias, a variável normalizada é z = -1.645 e então:

$$\frac{X-1\%}{4\%} = -1.645 \Leftrightarrow X = 1\% + 4\%(-1.645) = -5.58\%$$

5) Para estar entre os 1% piores dias, a variável normalizada é z = -2.3263 e então:

$$\frac{X-1\%}{4\%} = -2.3263 \Leftrightarrow X = 1\% + 4\%(-2.3263) = -8.31\%$$

6) Agora considere uma amostra de 25 dias úteis. O retorno médio na amostra é uma variável Normal com média 1% minutos e variância $(4\%)^2/25$.

$$\Pr(\overline{X} > 1.16) = \Pr\left(\frac{\overline{X}-1}{\sqrt{\frac{(4)(4)}{25}}} > \frac{1.16-1}{0.8}\right) = \Pr\left(Z > \frac{0.16\%}{0.8\%}\right) = \Pr(Z > 0.2) =$$

$$= 1 - \Phi(0.2) = 1 - 0.5793 = 0.4207$$

7) Seja V = Max(X_1, X_2, ..., X_{25}). Então:

Pr(V > 6%) = 1 – Pr(V ≤ 6%) = 1 - Pr(X_1 < 6%, X_2 < 6%, ..., X_{25} < 6%)

e como os X_i´s são iid, esta última probabilidade é igual a $\{\Pr(X_1 < 6\%)\}^{25}$. Mas:

$$\Pr(X_1 < 6) = \Pr\left(\frac{X_1 - 1}{4} < \frac{6-1}{4}\right) = \Pr\left(Z < \frac{5}{4}\right) = \Pr(Z < 1.25) = \Phi(1.25) = 0.8944$$

E então: Pr(V > 1.08%) = **1 - $(0.8944)^{25}$ = 93.87%**

8) Seja U = Min(X_1, X_2, ..., X_{25}). Então:

Pr(U < -5%) = 1 - Pr(U ≥ -5%) = 1- Pr(X_1 ≥ -5%, X_2 ≥ -5%, ..., X_{25} ≥ -5%) = 1 – $\{\Pr(X_1 \geq -5\%)\}^{25}$ =

= 1 – $\{1-\Phi(-1.5)\}^{25}$ = 1- $\{\Phi(+1.5)\}^{25}$ =**1 - $\{0.9332\}^{25}$ = 82.25%**

PROBLEMA 2 (40 pontos)

Você quer montar um portfolio com dois ativos que têm as seguintes características:

Ativo A: retorno médio = 3.6%, d.p. retorno = 8%

Ativo B: retorno médio = 1.2%, d.p. retorno = 3%

Suponha o caso mais geral, onde os dois ativos têm uma correlação ρ qualquer.

Seja w a proporção do ativo A no portfolio.

1) O retorno médio do portfolio é (em percentual): **(5 pontos)**

A	B	C	D
1.2 + 2.4w	**1.2 + 3.6w**	**2.4w + 1.2 – 2.(3.6)(1.2)w(1-w)ρ**	**2.4w + 1.2 + 2.(3.6)(1.2)w(1-w)ρ**

2) A variância do portfolio é $\mathbf{10^4}$ **vezes** a seguinte expressão:**(10 pontos)**

A	B	C	D
$73w^2 - 18w + 9$	**$73w^2 - 48\rho w^2 - w(18-48\rho) + 9$**	**$73w^2 + 48\rho w^2 - w(18+48\rho) + 9$**	**NDA**

3) No caso geral, o peso (w) do ativo A que fornece o portfolio de variância mínima é: **(10 pontos)**

A	B	C	D
$\frac{9-24\rho}{73+48\rho}$	$\frac{9-24\rho}{73-48\rho}$	$\frac{9+24\rho}{73+48\rho}$	$\frac{9}{73-48\rho}$

4) **Se $\rho = 0$ então: (5 pontos)**

	A	B	C	D
w (portfolio de variância mínima)	**0.1233**	**0.1233**	**0.1233**	**0.1854**
Desvio padrão do portfolio de variância mínima	**2.81%**	**2.81%**	**3.14%**	**2.59%**
Desvio padrão do portfolio com pesos iguais para os dois ativos	**4.27%**	**5.5%**	**5.5%**	**5.5%**

5) **Se $\rho = -0.2$ então: (5 pontos)**

	A	B	C	D
w (portfolio de variância mínima)	**0.1671**	**0.1671**	**0.1854**	**0.1854**
Desvio padrão do portfolio de variância mínima	**2.81%**	**2.59%**	**2.59%**	**2.81%**
Desvio padrão do portfolio com pesos iguais para os dois ativos	**3.98%**	**3.98%**	**3.83%**	**3.98%**

6) **Se ρ = -0.3 então: (5 pontos)**

	A	B	C	D
w (portfolio de variância mínima)	**0.1854**	**0.1854**	**0.1854**	**0.1854**
Desvio padrão do portfolio de variância mínima	**2.45%**	**2.59%**	**2.59%**	**2.45%**
Desvio padrão do portfolio com pesos iguais para os dois ativos	**3.98%**	**3.98%**	**3.83%**	**3.83%**

Solução

1) O **retorno médio** do portfolio é, **em qualquer condição**:

E(P) = w.E(A) + (1-w).E(B) = 3.6w/100 + (1-w)(1.2/100) = {3.6w + (1.2-1.2w)}/100=(2.4w+1.2)/100

2) A variância do retorno do portfolio é (em termos de w e ρ, o coeficiente de correlação) é:

$$VAR(P) = w^2.VAR(A) + (1-w)^2.VAR(B) + 2w(1-w)\rho\sqrt{VAR(A)}\sqrt{VAR(B)} =$$
$$= w^2\left(\frac{8}{100}\right)^2 + (1-w)^2\left(\frac{3}{100}\right)^2 + 2w(1-w)\rho\left(\frac{8}{100}\right)\left(\frac{3}{100}\right) =$$
$$= \frac{1}{10^4}\left\{64w^2 + 9\left(1-2w+w^2\right) + 48\rho\left(w-w^2\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{10^4}\left\{64w^2 + 9 - 18w + 9w^2 + 48\rho w - 48\rho w^2\right\} =$$
$$= \frac{1}{10^4}\left\{73w^2 - 48\rho w^2 - w(18-48\rho) + 9\right\}$$

3) O portfolio de mínimo risco é obtido resolvendo-se:

$$\frac{dVAR(P)}{dw} = 0 \Rightarrow 2(73)w - 96\rho w - (18-48\rho) = 0 \Rightarrow w = \frac{18-48\rho}{146-96\rho} = \frac{9-24\rho}{73-48\rho}$$

4) 5) 6) O desvio padrão do portfolio é, em qualquer caso (como função de w e ρ):

$$dp(P) = \frac{1}{100}\sqrt{73w^2 - 48\rho w^2 - w(18-48\rho) + 9}$$

PROBLEMA 3 (20 pontos)

Sejam X e Y variáveis Normais independentes, onde X tem média -1 e variância 4 e Y tem média -4 e variância 4.

Seja W = 12exp(4X -Y)

Então a média de W é:

A	B	C	D
12exp(34)	**12exp(-4)**	**12exp(26)**	**NDA**

Dica: Lembre-se da função geradora de momentos de uma variável Normal. Se Y é Normal (μ, σ^2) então sua fgm é: M(t) = exp(μ.t + $\sigma^2 t^2$/2)

Solução

Pode-se escrever X como exp(Y) onde Y é Normal(μ, σ^2). Então:

$$E(X) = E\left(e^Y\right) = M_Y(1) = \exp\left\{\mu(1) + \frac{\sigma^2 (1)^2}{2}\right\} = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

E(W) = 12.E(e^{4X-Y})=12.E(e^{4X})E(e^{-Y})=12.M_X(4).M_Y(-1)

= 12 . exp(-1(4)+4(4)^2/2).exp(-4(-1)+4(-1)^2/2)

= 12.exp(-4 + 2(16)).exp(+4 +2) = 12.exp(-4+32+6) = 12.exp(34)

IND 1115 - Inferência Estatística
Profa. Mônica Barros
FORMULÁRIO P2

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância	fgm
Uniforme	$f(x)=\dfrac{1}{b-a}\quad \text{se } a\le x\le b$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	Não é útil
Exponencial	$f(x)=\lambda.\exp(-\lambda.x)\quad \text{onde } \lambda>0 \text{ e } x\ge 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)$ se $t<\lambda$
Gama	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}.x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.e^{-\beta x}, & \text{onde x} \ge 0\\ 0 & \text{se x} < 0\end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha}$ se $t<\beta$
Qui-Quadrado	$f(x)=\dfrac{1}{2^{n/2}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}$	n	2n	$\left(\dfrac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ se $t<1/2$
Binomial	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$ para $x=0,1,2,\ldots,n$	n.p	n.p.q	$(pe^t+q)^n$
Hipergeométrica	$f(x)=\Pr(X=x)=\dfrac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n.\left(\dfrac{r}{N}\right)$	$n.\left(\dfrac{r}{N}\right)\left(1-\dfrac{r}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$	Não é útil
Geométrica	$f(n)=\Pr(X=n)=(1-p)^{n-1}p$ onde n = 1, 2, 3, ...	1/p	q/p^2	$M(t)=\dfrac{pe^t}{1-qe^t}$
Poisson	$\Pr(X=x)=f(x)=\dfrac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!}$ onde x = 0, 1, 2, ...	λ	λ	$E(e^{tX})=e^{\lambda.(e^t-1)}$
Binomial Negativa	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{x-1}{r-1}.p^r.q^{x-r}$ onde x = r, r + 1, r + 2, ...	r/p	$r.q/p^2$	$M(t)=\left(\dfrac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

Resultados Matemáticos

Série Geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty}a^k=1+a+a^2+a^3+\ldots..=\frac{1}{1-a}\quad \text{desde que } |a|<1$$

Teorema Binomial

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\quad \text{onde a e b são número reais e k, n são inteiros} \ge 0$$

Série de Taylor da Exponencial

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots...$$

Função de Distribuição (F(x))

1) F(x) = Pr(X ≤ x)
2) 0 ≤ F (x) ≤ 1
3) F(x) é uma função não decrescente
4) Lim F(x) = 1 se x →+∞
5) Lim F(x) = 0 se x → -∞

Relação entre densidade e função de distribuição

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

Se X é uma v.a. contínua, F(x) é contínua. Se X é discreta, F(x) é descontínua

Definição: k-ésimo momento

$$E(X^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k . f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} x^k . f(x) = \sum_{\text{todo x}} x^k . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: Média ou Valor Esperado de X

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x . f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} x . f(x) = \sum_{\text{todo x}} x . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: k-ésimo momento central

$$E((X-\mu)^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k . f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k . f(x) = \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^k . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Em particular, se k = 1: E(X – μ) = 0, ou seja, o primeiro momento central é sempre nulo.

Definição: Variância

$$\sigma^2 = VAR(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 . f(x) dx & \text{se X contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2 . f(x) = \sum_{\text{todo x}} (x-\mu)^2 . \Pr(X = x) & \text{se X discreta} \end{cases}$$

Fórmula alternativa para o cálculo da variância

$$\sigma^2 = VAR(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(u(X)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) . f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} u(x) . f(x) = \sum_{\text{todo x}} u(x) . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Definição: Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

Definição: Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{VAR(X)}$$

Propriedades – Média e Variância de constantes e funções lineares

Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer. Então:

1-) E(a.X + b) = a.E(X) + b

2-) E(a) = a

3-) VAR(a.X+ b) = a^2.VAR(X)

4-) VAR(a) = 0

Propriedade – linearidade do valor esperado:

E{a.u(X) + b.v(X)} = a E {u(X)} + b E {v(X)}

Função Geradora de Momentos (fgm)

$$M(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} e^{tx} . f(x) = \sum_{\text{todo x}} e^{tx} . \Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Poisson como aproximação da Binomial

Se X é Binomial(n, p), onde n é grande e p é pequeno (n > 20 e n.p < 5), pode-se aproximar as probabilidades Binomiais por probabilidades Poisson usando uma Poisson com a mesma média, isto é, usando λ = n.p.

Relação entre Momentos e fgm

$$M^{(k)}(0) = \left.\frac{d^k M(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = E(X^k)$$

Combinações Lineares de variáveis INDEPENDENTES

Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ **independentes** com médias $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ e variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n^2$.

Seja: $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$

A **variância de Y** é:

$$VAR(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 . VAR(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 . \sigma_i^2$$

onde $VAR(X_i) = \sigma_i^2$

E a **fgm de Y** é:

Então, a **média de Y** é:

$$E(Y) = E\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.E(X_i) =$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu_i \quad \text{onde } \mu_i = E(X_i)$$

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t(a_0 + a_1X_1 + ... + a_nX_n)}\right)$$

$$= E\left(e^{ta_0} e^{ta_1X_1} ....e^{ta_nX_n}\right) =$$

$$= e^{ta_0} E\left(e^{ta_1X_1} ....e^{ta_nX_n}\right)$$

e como conseqüência da independência

$$= e^{ta_0} E\left(e^{ta_1X_1}\right) E\left(e^{ta_2X_2}\right) ....E\left(e^{ta_nX_n}\right) =$$

$$e^{ta_0} M_{X_1}(ta_1) M_{X_2}(ta_2) ...M_{X_n}(ta_n)$$

Combinações Lineares de variáveis DEPENDENTES

Suponha que as médias e variâncias dos X_i´s são como no caso anterior, mas agora eles são DEPENDENTES, de tal forma que: $COV(X_i, X_j) = COV(X_j, X_i) = \rho_{ij}.\sigma_i.\sigma_j$ onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre X_i e X_j.
Seja Y definido como acima.

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

Então E(Y) é o mesmo que no caso de variáveis dependentes, MAS:

$$VAR(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.VAR(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j COV\left(X_i, X_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2.\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad \text{onde no 2o. termo i } \neq \text{ j}$$

onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre X_i e X_j

Portfolio

Combinação linear de ativos onde soma dos pesos = 1. Nos nossos exemplos estamos supondo que todos os pesos são positivos.
A média e a variância do portfolio podem ser obtidas diretamente das expressões acima para combinações lineares de variáveis dependentes. NOTAR que, acima no termo da covariância aparecem $a_i.a_j$ e $a_j.a_i$.

Função Gama

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t} dt$$

Propriedades da Função Gama

1) $\Gamma(n) = (n-1).\Gamma(n-1)$ para n > 1
2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ se n é inteiro > 1
3) $\Gamma(1) = 0! = 1$
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Padronização de uma variável aleatória

Se X tem média a e variância b^2 então Z = (X-a)/b tem média 0 e variância 1. Se, além disso, X é Normal, Z também é Normal.

Cálculo de probabilidades para variáveis Normais

Se X é uma variável Normal com média μ e desvio padrão σ então:

$$\Pr(a \le X \le b) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Simetria da tabela da N(0,1)

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ se z > 0

Combinações Lineares de Variáveis Normais

- Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias **independentes**, onde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ e seja $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
- Então Y tem distribuição Normal com média μ_y e variância σ_y^2 dadas por:

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{e} \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Casos particulares: se todos os X_i´s acima são iid com média μ e variância σ^2 então a soma é Normal com média $n.\mu$ e variância $n.\sigma^2$ e a média amostral é Normal com média μ e variância σ^2/n.

Densidade Lognormal

Se X é $N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = e^X$ é Lognormal. Pode-se provar que $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ e

$$VAR(Y) = \exp\left(2\mu + \sigma^2\right).\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Teorema – Relação entre Unif(0,1) e Beta

Sejam X1, X2, ... , Xn variáveis aleatórias independentes com densidade Unif(0,1). Seja Yr o r-ésimo número ordenado dentre os valores observados de X1, X2, ... , Xn (Por exemplo, Y1 é o menor dentre os Xi´s, Y2 é o 2o menor, ..., Yn é o maior deles). Então Yr tem densidade Beta com parâmetros r e n –r + 1.

Densidade Beta

$$f(x) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1} \quad \text{onde } 0 < \text{x} < 1 \text{ e m, n inteiros} \geq 1$$

Se X ~ Beta (m, n) então:

$$E(X) = \frac{m}{m+n}$$

$$VAR(X) = \frac{mn}{(m+n+1)\ (m+n)^2}$$

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(k+m)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(k+m+n)}$$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0,0000	50,00%		1,0000	84,13%		2,0125	97,79%
0,0200	50.80%		1,0100	84.38%		2.0200	97.83%
0,0300	51.20%		1.0167	84.54%		2.0300	97.88%
0,0400	51.60%		1.0250	84.73%		2.0400	97.93%
0,0500	51,99%		1,0500	85,31%		2.0412	97.94%
0,1000	53,98%		1,0553	85,44%		2.0500	97.98%
0,1500	55,96%		1,1000	86,43%		2,1000	98,21%
0,2000	57,93%		1,1180	86,82%		2,2000	98,61%
0,2236	58,85%		1,1475	87,44%		2,2361	98,73%
0,2500	59,87%		1,1500	87,49%		2,3000	98,93%
0,3000	61,79%		1,1553	87,60%		2,3263	99,00%
0,3015	61,85%		1,2000	88,49%		2,3333	99,02%
0,3475	63,59%		1,2060	88,61%		2,4000	99,18%
0,3492	63,65%		1,2200	88,88%		2,5000	99,38%
0,3500	63,68%		1,2500	89,44%		2,5500	99,46%
0,4000	65,54%		1.2700	89.79%		2,5628	99,48%
0.4167	66.15%		1,2816	90,00%		2,6000	99,53%
0,4307	66,67%		1,3000	90,32%		2,6500	99,60%
0,4500	67,36%		1,3333	90,88%		2,6667	99,62%
0,5000	69,15%		1,3750	91.54%		2,6833	99,64%
0,5500	70,88%		1,4000	91,92%		2,7000	99,65%
0,5774	71.81%		1,4468	92,60%		2.7500	99.70%
0,6000	72,57%		1,4500	92,65%		2,8000	99,74%
0,6250	73,40%		1,5000	93,32%		2,9000	99,81%
0,6500	74,22%		1,5500	93,94%		2,9500	99,84%
0,6667	74,75%		1,5811	94,31%		3,0000	99,87%
0,6708	74,88%		1,6000	94,52%		3,1000	99,90%
0,7000	75,80%		1,6450	95,00%		3,1500	99,92%
0,7500	77,34%		1,6667	95,22%		3,2000	99,93%
0,8000	78,81%		1,7000	95,54%			
0,8333	79.77%		1,8000	96,41%			
0,8500	80,23%		1.8500	96.78%			
0.8666	80.69%		1,9000	97,13%			
0,8944	81,45%		1.9500	97.44%			
0,9000	81,59%		1,9600	97,50%			
0,9167	82,03%		1,9800	97,61%			
0,9500	82,89%		2,0000	97,72%			
0,9500	82,89%		2,0100	97,78%			
0,9750	83,52%						
0,9800	83,65%						
0,9900	83,89%						