

**ENCE – CÁLCULO DE PROBABILIDADE II****Semestre 2009.01 – Profa. Monica Barros****Exercícios Resolvidos – Teorema Central do Limite e Teorema de DeMoivre e Laplace****Problema 1**

O consumo mensal em minutos por conta de celular numa certa região é uma v.a. com média 40 minutos e desvio padrão 12 minutos. Toma-se uma amostra de 24 usuários de celular.

- Qual a probabilidade do tempo médio de uso na amostra exceder 45 minutos?
- Qual a probabilidade do tempo médio de uso na amostra ser menor que 50 minutos?

**Solução**

A média amostral é uma variável com média e variância:

$$E(\bar{X}) = 40$$

$$VAR(\bar{X}) = \frac{(12)^2}{24} = 6$$

$$\begin{aligned} a) \Pr(\bar{X} > 45) &= \Pr\left(\frac{\bar{X} - 40}{\sqrt{6}} > \frac{45 - 40}{\sqrt{6}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{45 - 40}{\sqrt{6}}\right) = 1 - \Phi(2.0412) = \\ &= 1 - 0.9794 = 0.0206 \end{aligned}$$

$$b) \Pr(\bar{X} < 50) = \Pr\left(\frac{\bar{X} - 40}{\sqrt{6}} < \frac{50 - 40}{\sqrt{6}}\right) \approx \Phi\left(\frac{50 - 40}{\sqrt{6}}\right) = \Phi(4.0824) = 1$$

**Problema 2**

Seja  $Y \sim \text{Bin}(12, 1/2)$ .

- Calcule  $\Pr(Y \geq 9)$  exatamente.
- Calcule  $\Pr(Y \geq 9)$  aproximadamente pelo teorema de DeMoivre e Laplace com correção de continuidade.
- Calcule  $\Pr(Y = 7)$  exatamente.
- Calcule  $\Pr(Y = 7)$  aproximadamente pelo teorema de DeMoivre e Laplace com correção de continuidade.

**Solução**

- Cálculo exato:

<b>x</b>	<b>Pr(X=x)</b>
9	0.0537
10	0.0161
11	0.0029
12	0.0002
<b>soma</b>	<b>0.0730</b>

b)  $\Pr(Y \geq 9)$  é, com a correção de continuidade, aproximadamente igual a  $\Pr(Y \geq 8.5)$ , onde esta última é calculada a partir da distribuição Normal.

$$E(Y) = n.p = 6$$

$$\text{VAR}(Y) = n.p.q = 6(1/2) = 3$$

$$\begin{aligned} \Pr(Y \geq 9) &\approx \Pr(Y \geq 8.5) = \Pr\left(\frac{Y-6}{\sqrt{3}} \geq \frac{8.5-6}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{8.5-6}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \Phi(1.4434) = \\ &= 1 - 0.9255 = 0.0745 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \Pr(Y = 7) = \binom{12}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 0.1934$$

d) Pela aproximação do Teorema de DeMoivre e Laplace:

$$\begin{aligned} \Pr(Y = 7) &\approx \Pr(6.5 \leq Y \leq 7.5) = \Pr\left(\frac{6.5-6}{\sqrt{3}} \leq \frac{Y-6}{\sqrt{3}} \leq \frac{7.5-6}{\sqrt{3}}\right) = \Phi\left(\frac{7.5-6}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{6.5-6}{\sqrt{3}}\right) = \\ &= \Phi(0.8660) - \Phi(0.2887) = 0.8068 - 0.6136 = 0.1932 \end{aligned}$$

**Problema 3**

Aproxime, com base no Teorema Central do Limite, as seguintes probabilidades:

$$a) \Pr(\chi_{25}^2 \leq 27) = \Pr\left(\frac{\chi_{25}^2 - 25}{\sqrt{50}} \leq \frac{27 - 25}{\sqrt{50}}\right) \approx \Phi\left(\frac{27 - 25}{\sqrt{50}}\right) = \Phi(0.2828) = 0.6114$$

$$b) \Pr(\chi_{36}^2 > 48) = \Pr\left(\frac{\chi_{36}^2 - 36}{\sqrt{72}} \leq \frac{48 - 36}{\sqrt{72}}\right) \approx \Phi\left(\frac{48 - 36}{\sqrt{72}}\right) = \Phi(1.4142) = 0.9214$$

**PROBLEMA 4**

Considere uma variável Binomial com  $n = 32$  e  $p = 1/2$ .

a) Calcule exatamente:

<b>x</b>	<b>Pr(X = x)</b>
15	<b>0.1317</b>
16	<b>0.1399</b>
17	<b>0.1317</b>
Pr(15 ≤ X ≤ 17)	<b>0.4034</b>

b) Calcule usando o Teorema de DeMoivre e Laplace **com** correção de continuidade.

<b>x</b>	<b>Pr(X = x)</b>
15	<b>0.1319</b>
16	<b>0.1403</b>
17	<b>0.1319</b>
Pr(15 ≤ X ≤ 17)	<b>0.4041</b>

**Problema 5**

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  iid Poisson(1). Seja  $Y$  a soma dos  $X$ 's. Aproxime, com base no Teorema Central do Limite, as seguintes probabilidades:

- a)  $\Pr(Y \leq 27)$  onde  $Y$  é a soma de 25  $X_i$ 's  
 b)  $\Pr(Y > 48)$  onde  $Y$  é a soma de 36  $X_i$ 's

**Solução**

$$a) \Pr(Y \leq 27) = \Pr\left(\frac{Y - 25}{\sqrt{25}} \leq \frac{27 - 25}{\sqrt{25}}\right) \approx \Phi\left(\frac{27 - 25}{\sqrt{25}}\right) = \Phi(0.4000) = 0.6554$$

$$b) \Pr(Y > 48) = \Pr\left(\frac{Y - 36}{\sqrt{36}} > \frac{48 - 36}{\sqrt{36}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{48 - 36}{\sqrt{36}}\right) = 1 - \Phi(2) = 0.9773 = 0.0227$$

**Problema 6**

As notas num certo exame padronizado têm média 450 e desvio padrão 50. Uma nota acima de 480 é considerada muito boa. Uma pessoa consegue entrar um MBA de prestígio se ela obtém acima de 480 neste exame.

Numa certa sala onde o exame foi aplicado, 25 pessoas fizeram o teste. A nota média destas pessoas foi 490. Isso é estranho? Você acha que deve haver algum tipo de investigação para tentar detectar alguma fraude? Dica – use o Teorema Central do Limite.

**SOLUÇÃO**

Seja  $X$  a nota no teste. Pelo enunciado do problema,  $X$  tem média 450 e desvio padrão 50. Logo, a média amostral das notas das 25 pessoas daquela sala (supondo que as notas são iid) é uma variável com média 450 e variância  $(50)^2/25$ . Então, pelo teorema central do limite:

$$\frac{\bar{X} - 450}{\sqrt{\frac{(50)^2}{25}}} = \frac{\bar{X} - 450}{\frac{50}{5}} = \frac{\bar{X} - 450}{10} \quad \text{é aproximadamente } N(0,1).$$

$$\Pr(\bar{X} > 490) = \Pr\left(\frac{\bar{X} - 450}{10} > \frac{490 - 450}{10}\right) = 1 - \Phi(4) = 0$$

Logo, é absolutamente improvável que a nota média daquelas 25 pessoas tenha superado 490, um indício claro de fraude no teste, que deverá ser investigado.