ENCE – CÁLCULO DE PROBABILIDADE II

Semestre 2009.01 – Profa. Monica Barros

Lista de exercícios 1

Problema 1

Sejam X e Y v.a. contínuas com densidade conjunta:

$$f(x,y) = cy^2 + 2xy \quad 0 \le \mathrm{x} \le 1, 0 \le \mathrm{y} \le 1$$

a) Encontre a constante c que faz desta expressão uma densidade.

b) Encontre a densidade marginal de X.

c) Encontre a densidade marginal de Y.

d) Encontre a densidade condicional de X dado Y = y.

e) Encontre a média condicional de X dado Y = y.

f) Encontre a variância condicional de X dado Y = y.

g) Faça o gráfico da média condicional de X dado Y = y versus y (a curva de regressão).

h) X e Y são independentes.

Problema 2

Considere a seguinte densidade conjunta:

$$f(x,y) = \frac{1}{4}.e^{-y/2}, x > 0, y > x$$

a) Ache a densidade marginal de X.

b) Ache a densidade marginal de Y.

c) Calcule Pr(X > 1 Y < 4)

Dica:

$$\int u.e^{au} du = \frac{e^{au}}{a}.\left(u - \frac{1}{a}\right)$$

Problema 3

Suponha que a densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy(4-x-y) & \text{se } 0<\text{x}<2 \text{ e } 0<\text{y}<1 \\ 0 & \text{do contrário} \end{cases}$$

a) Ache k que torna esta expressão uma densidade.

b) Calcule a média condicional de X dado Y = y onde 0 < y < 1.

c) Faça o gráfico da média condicional de X dado Y = y.

d) Calcule a variância condicional de X dado Y = y onde 0 < y < 1.

Problema 4

A densidade conjunta de X e Y é:

$$f(x,y)=kx.e^{-\frac{xy}{3}} \quad \text{se } 0<\text{x}<3 \text{ e } \text{y}>0$$

a) Ache k que faz desta expressão uma densidade.

b) Ache a densidade condicional de Y dado X = x.

c) Ache a média condicional de Y dado X = x.

d) Ache a variância condicional de Y dado X = x.

e) Ache a densidade condicional de X dado Y = y.

f) Calcule a média condicional de exp(tY) dado X = x. Sob que condições este momento existe?

Problema 5

Sejam X_1, X_2, X_3 e X_4 iid Expo(λ). Usando os resultados da aula 4 e a fórmula da convolução, encontre a densidade de $Y = X_1 + X_2 + X_3$ e de $W = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Problema 6

Sejam X_1, X_2 iid Expo(λ). Qual a densidade de X_1 dado a soma de X_1 e X_2?

Problema 7

Sejam X_1, X_2 iid Poisson(λ). Qual a função de probabilidade de X_1 dado a soma de X_1 e X_2?

Problema 8

Sejam X_1, X_2 iid Binomial(n,p).

a) Mostre que a soma de X_1 e X_2 é Binomial(2n, p).

b) Qual a função de probabilidade de X_1 dado a soma de X_1 e X_2?

Problema 9

Seja X uma v.a. Geom(p) com função de probabilidade dada por:

$$f(x) = \Pr(X = x) = q^{x-1}.p \quad \text{para x} = 1,2,.... \quad \text{onde q} = 1 - \text{p}$$

Encontre Pr(X = 4 | X ≥ 1)

Problema 10

A função de probabilidade conjunta de X e Y é dada na tabela a seguir:

X $\rightarrow$ Y $\downarrow$	1	2	3
1	2/18	6/18	2/18
2	2/18	0	1/18
3	0	3/18	2/18

a) Calcule E(X | Y = j) para j =1,2,3

b) Calcule E (Y | X = i) para i =1,2,3

c) X e Y são independentes? Se não, calcule a covariância e o coeficiente de correlação entre X e Y.

Problema 11

Seja X uma v.a. Expo(λ). Mostre que E(X | X > 1) = 1 + 1/ λ.

Dica: use a dica do problema 2, pois você vai precisar daquela integral.

Problema 12

Seja X uma v.a. Uniforme(0,1). Ache E(X | X < 1/2).

Problema 13

A densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x,y) = \frac{e^{-y}}{y} \quad \text{se } 0 < \mathrm{x} < \mathrm{y} \quad \text{e } \mathrm{y} > 0$$

a) Ache a média condicional de X dado Y = y.

b) Ache a variância condicional de X dado Y = y.

Problema 14

Sejam X_1, X_2, X_3 iid Unif(0,1).

a) Usando os resultados da aula 5 e a fórmula da convolução, ache a densidade de $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

b) Calcule $Pr(X_1 + X_2 + X_3 < 2)$

Problema 15

Suponha que X_1 é escolhido aleatoriamente em (0,1), X_2 é escolhido aleatoriamente em $(0,X_1)$ e X_3 escolhido aleatoriamente em $(0, X_2)$.

a) Ache a densidade conjunta de X_1, X_2, X_3.

b) Ache a densidade marginal de X_3.

Problema 16

Sejam X e Y iid Unif(0,1). Mostre que a densidade condicional de x dado $Z = X + Y$ é Unif(0,z) se $0 < z \leq 1$ e Unif(z-1, 1) se $1 < z < 2$.