

ENCE – CÁLCULO DE PROBABILIDADE II**Semestre 2009.01 – Profa. Monica Barros****Lista de exercícios 1 – SOLUÇÕES (PARTE)****Problema 1**

Sejam X e Y v.a. contínuas com densidade conjunta:

$$f(x, y) = cy^2 + 2xy \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

- a) Encontre a constante c que faz desta expressão uma densidade.
- b) Encontre a densidade marginal de X.
- c) Encontre a densidade marginal de Y.
- d) Encontre a densidade condicional de X dado $Y = y$.
- e) Encontre a média condicional de X dado $Y = y$.
- f) Encontre a variância condicional de X dado $Y = y$.
- g) Faça o gráfico da média condicional de X dado $Y = y$ versus y (a curva de regressão).
- h) X e Y são independentes.

Problema 2

Considere a seguinte densidade conjunta:

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \cdot e^{-y/2}, \quad x > 0, y > x$$

- a) Ache a densidade marginal de X.
- b) Ache a densidade marginal de Y.
- c) Calcule $\Pr(X > 1 \mid Y < 4)$

Dica:

$$\int u \cdot e^{au} du = \frac{e^{au}}{a} \cdot \left(u - \frac{1}{a} \right)$$

Problema 3

Suponha que a densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy(4 - x - y) & \text{se } 0 < x < 2 \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{do contrário} \end{cases}$$

- a) Ache k que torna esta expressão uma densidade.
- b) Calcule a média condicional de X dado $Y = y$ onde $0 < y < 1$.
- c) Faça o gráfico da média condicional de X dado $Y = y$.
- d) Calcule a variância condicional de X dado $Y = y$ onde $0 < y < 1$.

Problema 4

A densidade conjunta de X e Y é:

$$f(x, y) = kx \cdot e^{-\frac{xy}{3}} \quad \text{se } 0 < x < 3 \text{ e } y > 0$$

- a) Ache k que faz desta expressão uma densidade.
- b) Ache a densidade condicional de Y dado $X = x$.
- c) Ache a média condicional de Y dado $X = x$.
- d) Ache a variância condicional de Y dado $X = x$.
- e) Ache a densidade condicional de X dado $Y = y$.
- f) Calcule a média condicional de $\exp(tY)$ dado $X = x$. Sob que condições este momento existe?

Problema 5

Sejam X_1, X_2, X_3 e X_4 iid $\text{Expo}(\lambda)$. Usando os resultados da aula 4 e a fórmula da convolução, encontre a densidade de $Y = X_1 + X_2 + X_3$ e de $W = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Problema 6

Sejam X_1, X_2 iid $\text{Expo}(\lambda)$. Qual a densidade de X_1 dado a soma de X_1 e X_2 ?

Solução

Seja $Z = X_1 + X_2$.

Pela fórmula do convolução:

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \cdot \exp\{-\lambda \cdot x\} \lambda \cdot \exp\{-\lambda \cdot (z-x)\} dx = \int_0^z \lambda \cdot \exp\{-\lambda \cdot x\} \lambda \cdot \exp\{-\lambda \cdot (z-x)\} dx = \\
 &= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda \cdot z} \int_0^z dx = \lambda^2 \cdot z \cdot e^{-\lambda \cdot z} \quad \text{para } z > 0
 \end{aligned}$$

Note que a integral na fórmula da convolução se transformou numa integral em $(0, z)$ pois se uma das variáveis ultrapassasse z (o valor da soma), a outra se tornaria negativa, o que não pode ocorrer quando ambas as variáveis são Exponenciais.

A densidade de X_1 condicional ao valor da soma é:

$$\begin{aligned}
 f(x_1 | Z = z) &= \frac{f(x_1, Z = z)}{f_Z(z)} = \frac{f(x_1, x_2 = z - x_1)}{f_Z(z)} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_1} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (z-x_1)}}{\lambda^2 \cdot z \cdot e^{-\lambda \cdot z}} \\
 &= \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda \cdot z}}{\lambda^2 \cdot z \cdot e^{-\lambda \cdot z}} = \frac{1}{z} \quad \text{para } 0 < x_1 < z
 \end{aligned}$$

Ou seja, DADO o valor da soma $Z = z$, X_1 é Uniforme no intervalo $(0, z)$, onde z é o valor da soma $Z = z$.

Problema 7

Sejam X_1, X_2 iid Poisson(λ). Qual a função de probabilidade de X_1 dado a soma de X_1 e X_2 ?

Problema 8

Sejam X_1, X_2 iid Binomial(n, p).

a) Mostre que a soma de X_1 e X_2 é Binomial($2n, p$).

b) Qual a função de probabilidade de X_1 dado a soma de X_1 e X_2 ?

Problema 9

Seja X uma v.a. Geom(p) com função de probabilidade dada por:

$$f(x) = \Pr(X = x) = q^{x-1} \cdot p \quad \text{para } x = 1, 2, \dots \quad \text{onde } q = 1 - p$$

Encontre $\Pr(X = 4 \mid X \geq 1)$

Problema 10

A função de probabilidade conjunta de X e Y é dada na tabela a seguir:

$X \rightarrow$	1	2	3
$Y \downarrow$			
1	2/18	6/18	2/18
2	2/18	0	1/18
3	0	3/18	2/18

a) Calcule $E(X \mid Y = j)$ para $j = 1, 2, 3$

b) Calcule $E(Y \mid X = i)$ para $i = 1, 2, 3$

- c) X e Y são independentes? Se não, calcule a covariância e o coeficiente de correlação entre X e Y.

Problema 11

Seja X uma v.a. Expo(λ). Mostre que $E(X | X > 1) = 1 + 1/\lambda$.

Dica:

$$\int u.e^{au} du = \frac{e^{au}}{a} \left(u - \frac{1}{a} \right)$$

Solução

Em primeiro lugar é preciso determinar quem é a densidade definida apenas no intervalo $(1, \infty)$. Note que esta precisa ser uma densidade propriamente dita, ou seja, integrar a um.

Então precisamos achar uma constante c tal que:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} c.\lambda.e^{-\lambda x} dx &= 1 \Leftrightarrow c \int_1^{\infty} \lambda.e^{-\lambda x} dx = 1 \Leftrightarrow c.\Pr(X > 1) = 1 \\ \Leftrightarrow c.e^{-\lambda(1)} &= 1 \Leftrightarrow c = 1/e^{-\lambda} \Leftrightarrow c = e^{+\lambda} \end{aligned}$$

Logo, a densidade Exponencial definida a partir de 1 é:

$$f(x) = e^{\lambda} . \lambda . e^{-\lambda . x} \quad \text{para } x > 1$$

Para encontrar o valor esperado desejado:

$$\begin{aligned} E(X | X > 1) &= \int_1^{\infty} x.e^{\lambda} . \lambda . e^{-\lambda . x} dx = e^{\lambda} . \lambda \int_1^{\infty} x.e^{-\lambda . x} dx = e^{\lambda} . \lambda \left\{ \frac{e^{-\lambda . x}}{-\lambda} \left(x + \frac{1}{-\lambda} \right) \right\} \Big|_1^{\infty} = \\ &= e^{\lambda} . \lambda \left\{ 0 + \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \right\} = \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Problema 12

Seja X uma v.a. Uniforme(0,1). Ache $E(X | X < 1/2)$.

Solução

A solução é análoga à do problema anterior.

Qual será a nova densidade, agora restrita ao intervalo (0,1/2)?

A densidade original é 1 se $0 < x < 1$.

A nova densidade, restrita a $(0, 1/2)$, é tal que:

$$\int_0^{1/2} c(1)dx = 1 \Leftrightarrow c.x \Big|_0^{1/2} = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{2} - 0 = 1 \Leftrightarrow c = 2$$

Logo, a nova densidade (restrita ao intervalo (0,1/2)) é:

$f(x) = 2$ se $0 < x < 1/2$, ou seja, é a densidade Unif(0, 1/2).

A média condicional desejada é apenas:

$$E(X | X < 1/2) = \int_0^{1/2} 2x.dx = \frac{2x^2}{2} \Big|_0^{1/2} = x^2 \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4}$$

Problema 13

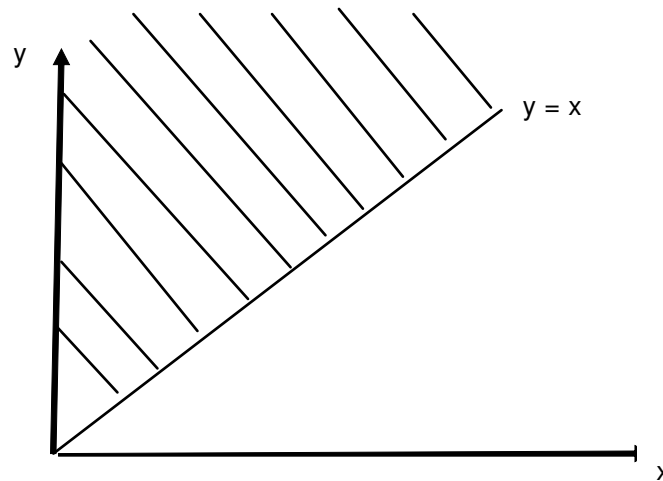
A densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x, y) = \frac{e^{-y}}{y} \quad \text{se } 0 < x < y \quad \text{e } y > 0$$

- Ache a média condicional de X dado $Y = y$.
- Ache a variância condicional de X dado $Y = y$.

Solução

O domínio da densidade conjunta é a região mostrada a seguir:



O primeiro passo é encontrar a densidade condicional de X dado Y = y. Esta é dada pela razão da conjunta pela marginal de Y.

A marginal de Y é:

$$f_Y(y) = \int_0^y \frac{e^{-y}}{y} dx = y \cdot \frac{e^{-y}}{y} = e^{-y} \quad \text{para } y > 0$$

Ou seja, a marginal de Y é uma Exponencial com média 1.

A densidade condicional de X dado Y = y é:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-y}/y}{e^{-y}} = \frac{1}{y} \quad \text{para } 0 < x < y$$

Ou seja, DADO Y = y, X é Uniforme no intervalo (0,y).

E qual a sua média condicional? Pelos resultados da Uniforme, é y/2.

Faça as contas para confirmar! Ou seja, $E(X|Y = y) = y/2$.

Analogamente, pelas propriedades da densidade Uniforme,

$\text{VAR}(X | Y = y) = y^2/12$ (comprove!)

Problema 14

Sejam X_1, X_2, X_3 iid Unif(0,1).

- a) Usando os resultados da aula 5 e a fórmula da convolução, ache a densidade de $Y = X_1 + X_2 + X_3$.
- b) Calcule $\Pr(X_1 + X_2 + X_3 < 2)$

Problema 15

Suponha que X_1 é escolhido aleatoriamente em (0,1), X_2 é escolhido aleatoriamente em (0, X_1) e X_3 escolhido aleatoriamente em (0, X_2).

- a) Ache a densidade conjunta de X_1, X_2, X_3 .
- b) Ache a densidade marginal de X_3 .

Problema 16

Sejam X e Y iid Unif(0,1). Mostre que a densidade condicional de x dado $Z = X + Y$ é Unif(0, z) se $0 < z \leq 1$ e Unif($z-1, 1$) se $1 < z < 2$.

