ENCE – CÁLCULO DE PROBABILIDADE II

Semestre 2009.01 – Profa. Monica Barros

Lista de exercícios 2

Problema 1

Suponha que X tem distribuição Beta com parâmetros a e b. Mostre que Y = 1-X tem distribuição Beta com parâmetros b e a.

Problema 2

A densidade Weibull é freqüentemente usada para modelar a duração de sistemas eletrônicos, e é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} m x^{m-1} \exp\left\{-\dfrac{x^m}{\alpha}\right\} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{do contrário} \end{cases}$$

onde α e m são constantes positivas.

a) Ache a densidade de $Y = X^m$
b) Encontre $E(X^k)$ para todo inteiro positivo k.

Dica: Função Gama

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t}\, dt \quad \text{onde } \lambda \geq 0$$

Problema 3

Seja X uma v.a. contínua com densidade:

$$f(x) = \frac{3}{x^4} \qquad x > 1$$

Encontre a densidade de Y = 1/X.

Problema 4

Seja X uma v.a. contínua que mede o preço por minuto (em centavos) de chamadas originadas de celular num certo plano.

$$f(x) = \frac{c}{x^5} \quad x \in (10,30)$$

Seja Y o volume de minutos falado (consumido) por um usuário por mês, e suponha que:

$$Y = \left\{ \frac{(30)^5}{X^5} + 100 \right\}$$

a) Encontre a constante que faz de f(x) uma densidade.
b) Encontre a densidade de Y.

Problema 5

Seja X uma v.a. contínua com densidade:

$$f(x) = 2.x.\exp(-x^2) \quad \text{onde } x > 0$$

Mostre que a densidade de $Y = X^2$ é Exponencial com parâmetro 1.

Problema 6

O tempo médio de espera até que a sua ligação seja atendida por uma central de atendimento é uma variável Exponencial com média 3 minutos.

Duas pessoas esperam, de maneira independente, para serem atendidas pela mesma central. Seja T o tempo total de espera das duas pessoas, ou seja, a soma dos tempos de espera individuais.

Usando a fórmula da convolução encontre a densidade de T e calcule:

1) A probabilidade do tempo total de espera ultrapassar 6 minutos.
2) A probabilidade do tempo total de espera ser menor que 4 minutos.

Dica:

$$\int_0^b x.e^{-kx} dx = \frac{1 - e^{-k.b}(1 + k.b)}{k^2}$$

Problema 7

O número de clientes que entram numa loja num dia qualquer é uma variável Poisson com média 10. A quantidade de dinheiro gasta por um cliente é uma variável Uniforme(0,150). Encontre a média e a variância da quantidade de dinheiro que a loja fatura num dia qualquer.

TEOREMA

Seja U uma variável Uniforme(0,1). Seja $X = F^{-1}(U)$. Então X tem função de distribuição F, ou seja, $Pr(X \leq x) = F(x)$

DEMONSTRAÇÃO

$Pr(X \leq x) = Pr(F^{-1}(U) \leq x) = Pr(U \leq F(x)) = F(x)$ pois U é Unif(0,1) e sua função de distribuição é apenas: $Pr(U \leq u) = u$ desde que $0 < u < 1$.

Este teorema é muito importante na prática, pois nos permite simular variáveis aleatórias com uma função de distribuição F(x) (e densidade f(x) = dF/dx) a partir de variáveis Unif(0,1), que estão disponíveis na maioria dos softwares e linguagens de programação.

Note que a transformação X = (-1/l).ln(U) para gerar uma variável Exponencial(l) pode ser interpretada exatamente neste contexto.

Problema 8

Seja $f(x) = a.x^{--a-1}$ para $x \geq 1$, onde a é um parâmetro positivo.

a) Use o teorema anterior para mostrar como podemos gerar uma v.a. X com esta densidade a partir de uma v.a. Uniforme(0,1).

b) Gere 20000 v.a. Uniforme(0,1) no Excel. Use a transformação do item a) com parâmetro a = 2 e faça o histograma das variáveis geradas pelo processo. O histograma tem o mesmo aspecto da densidade teórica?

c) Calcule, para a densidade com parâmetro a = 2, a $Pr(1 < X < 2)$ e calcule empiricamente a mesma probabilidade, contando quantas das 20000 variáveis geradas, caem no intervalo (1,2).

d) Repita o item c) para $Pr(1 < X < 3)$.

e) Nos itens c) e d), calcule o "erro" da aproximação por usar os dados simulados ao invés da probabilidade real como:

$$ERRO\_\% = \left| \frac{\text{prob\_real - prob\_aproximada}}{\text{prob\_real}} \right|$$

O erro das aproximações é muito grande em c) e d)?

Problema 9

Considere a densidade Weibull do problema 2 (e os resultados do problema 2). Como você poderia usar uma v.a. Unif(0,1) para gerar uma v.a. Weibull?

Problema 10

Seja X uma variável Uniforme(-1,1). Mostre que Y = |X| é Uniforme (0,1).

Problema 11

A velocidade de uma molécula de gás é uma variável aleatória contínua V com densidade dada por:

$$f(v) = a.v^2.e^{-bv^2} \text{, onde b é uma constante que depende do gás e v} > 0$$

Onde a > 0 é uma constante determinada a partir do fato de f(v) integrar a 1 no intervalo (0, + ∞). Seja Z a energia cinética da molécula de gás, dada por:

$$Z = \frac{mV^2}{2}$$

Encontre a densidade de Z (você pode usar o método do Jacobiano ou o da função de distribuição)

Problema 12

A duração (Y) de componentes eletrônicos é às vezes modelada pela densidade Rayleigh, mostrada a seguir.

$$f(y) = \left(\frac{2y}{\theta}\right)\exp\left\{\frac{-y^2}{\theta}\right\} \quad \text{onde y} > 0$$

Encontre a densidade de U = Y^2.

Use o resultado acima para achar a média e variância de U.

Problema 13

Seja Y o número de clientes que entram numa loja de roupas num shopping num dia. Y é uma v.a. Poisson com média M onde M é, por sua vez, uma v.a. Gama, pois depende de coisas como: a localização do shopping, a atividade econômica do país, a renda do consumidor, etc...

Suponha que, numa determinada localidade, M seja uma variável Gama com média 16 e desvio padrão 8.

a) Calcule a função de probabilidade marginal de Y.

b) Calcule a densidade condicional de M dado Y = y.

Suponha agora que, noutra localidade, M é uma variável Gama com média 16 e desvio padrão 4.

c) Calcule a função de probabilidade marginal de Y.

d) Calcule a densidade condicional de M dado Y = y.

e) Faça os gráficos das densidades de M nos dois casos apresentados.

Problema 14

Considere o problema anterior.

Suponha ainda que, dado M = m, Y é Poisson(m), mas agora M é uma variável DISCRETA com a seguinte função de probabilidade:

m	Pr(M=m)
2	0.4
3	0.3
4	0.2
5	0.1

a) Qual a função de probabilidade marginal de Y?

b) Qual a função de probabilidade condicional de M dado Y = y?

Problema 15

Seja X uma variável $N(\mu, \sigma^2)$. Ache a densidade de $Y = e^X$. Y é uma variável LOGNORMAL.

Problema 16

Seja X uma variável Exponencial(λ). Ache a densidade de Y = cX, onde c é uma constante positiva.