

ENCE – CÁLCULO DE PROBABILIDADE II**Semestre 2009.01 – Profa. Monica Barros****Lista de exercícios 2 – soluções****Problema 1**

Suponha que X tem distribuição Beta com parâmetros a e b . Mostre que $Y = 1 - X$ tem distribuição Beta com parâmetros b e a .

Solução

Note que X é definida no intervalo $(0,1)$ e portanto Y também é. A função $Y = 1 - X$ é injetora, e podemos aplicar o método do Jacobiano.

$$x = 1 - y \Rightarrow dx/dy = -1 \Rightarrow |J| = |dx/dy| = +1$$

$$g(y) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-y)^{a-1} y^{b-1} |1| = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} y^{b-1} (1-y)^{a-1} \quad \text{que é a densidade Beta}(b,a)$$

Problema 2

A densidade Weibull é freqüentemente usada para modelar a duração de sistemas eletrônicos, e é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} m x^{m-1} \exp\left\{-\frac{x^m}{\alpha}\right\} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{do contrário} \end{cases}$$

onde α e m são constantes positivas.

- Ache a densidade de $Y = X^m$
- Encontre $E(X^k)$ para todo inteiro positivo k .

Dica: Função Gama

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt \quad \text{onde } \lambda \geq 0$$

Solução

a) Como $x > 0$, a função $Y = X^m$ é injetora para qualquer $m > 0$ e assim podemos usar o método do jacobiano. Então $X = (Y)^{1/m}$ e $dx = (1/m)(y)^{(1/m)-1} dy$ e a densidade de y é:

$$g(y) = \frac{1}{\alpha} m (y^{1/m})^{m-1} \exp\left(\frac{-y}{\alpha}\right) \cdot \left| \frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1} \right| = \frac{1}{\alpha} \exp\left(\frac{-y}{\alpha}\right)$$

ou seja, Y é Exponencial com média α .

$$b) E(X^k) = E\left(\left(Y^{\frac{1}{m}}\right)^k\right) = E(Y^{k/m}) = \int_0^{\infty} y^{\frac{k}{m}} \frac{1}{\alpha} e^{-y/\alpha} dy$$

Faça a mudança de variáveis $t = y/\alpha$ e então $y = \alpha \cdot t$ e $dt = dy/\alpha$. Logo:

$$E(X^k) = E(Y^{k/m}) = \int_0^{\infty} (\alpha \cdot t)^{\frac{k}{m}} \left\{ \frac{1}{\alpha} e^{-t} (\alpha \cdot dt) \right\} = \alpha^{\frac{k}{m}} \int_0^{\infty} t^{\frac{k}{m}} \cdot e^{-t} dt = \alpha^{\frac{k}{m}} \Gamma\left(\frac{k}{m} + 1\right)$$

Por exemplo, se $k = 1$:

$$E(X) = \alpha^{\frac{1}{m}} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)$$

Se $k = 2$

$$E(X^2) = \alpha^{\frac{2}{m}} \Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right)$$

Etc...

Problema 3

Seja X uma v.a. contínua com densidade:

$$f(x) = \frac{3}{x^4} \quad x > 1$$

Encontre a densidade de $Y = 1/X$.

Solução

A função inversa é:

$$x = 1/y \Rightarrow dx/dy = -1/y^2 \Rightarrow |J| = |dx/dy| = +1/y^2$$

Note que, como $X > 1$, quando X tende a infinito, Y tende a zero, e se X tende a 1, Y também tende a 1. Logo, o domínio da densidade de Y é $(0,1)$.

$$g(y) = 3 \cdot y^4 \left(\frac{1}{y^2}\right) = 3y^2 \quad \text{se } 0 < y < 1$$

Problema 4

Seja X uma v.a. contínua que mede o preço por minuto (em centavos) de chamadas originadas de celular num certo plano.

$$f(x) = \frac{c}{x^5} \quad x \in (10, 30)$$

Seja Y o volume de minutos falado (consumido) por um usuário por mês, e suponha que:

$$Y = \left\{ \frac{(30)^5}{X^5} + 100 \right\}$$

- Encontre a constante que faz de $f(x)$ uma densidade.
- Encontre a densidade de Y .

Solução

- A constante que define a densidade pode ser encontrada através de:

$$\int_{10}^{30} \frac{c}{x^5} dx = \frac{c}{-4x^4} \Big|_{10}^{30} = -\frac{c}{4} \left\{ \frac{1}{(30)^4} - \frac{1}{(10)^4} \right\} = +\frac{c}{4} \left\{ \frac{1}{(10)^4} - \frac{1}{(30)^4} \right\} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{4} \left\{ \frac{800000}{81(10)^8} \right\} = c \left\{ \frac{200000}{81(10)^8} \right\} = c \left\{ \frac{2}{81(10)^3} \right\} = c \left\{ \frac{2}{81000} \right\} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{81000}{2} = 40500$$

- função que relaciona X e Y é injetora, portanto podemos usar o método do Jacobiano.

A transformação inversa é:

$$Y = \left\{ \frac{(30)^5}{X^5} + 100 \right\} \Leftrightarrow \frac{(30)^5}{X^5} = Y - 100 \Leftrightarrow X^5 = \frac{(30)^5}{Y - 100} \Leftrightarrow X = \frac{30}{(Y - 100)^{1/5}} =$$

$$\Leftrightarrow X = 30(Y - 100)^{-1/5}$$

Note que o intervalo de valores possíveis para Y é $(101, 343)$.

A derivada da função inversa é:

$$\frac{dx}{dy} = 30 \left(\frac{-1}{5} \right) (y - 100)^{-6/5} = -\frac{6}{(y - 100)^{6/5}}$$

Note que o Jacobiano é negativo, e portanto devemos utilizar seu módulo.

$$g(y) = \frac{40500}{30^5} \left| \frac{6}{(Y-100)^{6/5}} \right| = \frac{40500(Y-100)}{30^5} \left\{ \frac{6}{(Y-100)^{6/5}} \right\} =$$

$$= \frac{243000}{(30)^5 (Y-100)^{1/5}} \quad \text{onde } 101 < y < 343$$

Problema 5

Seja X uma v.a. contínua com densidade:

$$f(x) = 2 \cdot x \cdot \exp(-x^2) \quad \text{onde } x > 0$$

Mostre que a densidade de $Y = X^2$ é Exponencial com parâmetro 1.

Solução

Podemos usar o método do Jacobiano pois na região $x > 0$ a função $Y = X^2$ é injetora. A transformação inversa é:

$$x = \sqrt{y} = y^{1/2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$g(y) = 2\sqrt{y} \cdot e^{-y} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = e^{-y} \quad \text{para } y > 0$$

Ou seja, Y é uma variável Exponencial com média 1.

Problema 6

O tempo médio de espera até que a sua ligação seja atendida por uma central de atendimento é uma variável Exponencial com média 3 minutos.

Duas pessoas esperam, de maneira independente, para serem atendidas pela mesma central. Seja T o tempo total de espera das duas pessoas, ou seja, a soma dos tempos de espera individuais.

Usando a fórmula da convolução encontre a densidade de T e calcule:

- 1) A probabilidade do tempo total de espera ultrapassar 6 minutos.
- 2) A probabilidade do tempo total de espera ser menor que 4 minutos.

Dica:

$$\int_0^b x.e^{-kx} dx = \frac{1 - e^{-k.b} (1 + k.b)}{k^2}$$

Solução

X_1 = tempo de espera da 1ª. pessoa, é Exponencial com média 3 minutos, isto é, $\lambda = 1/3$. X_2 é o tempo de espera da 2ª. pessoa, que é independente de X_1 e tem a mesma densidade.

$T = X_1 + X_2$ é o tempo total de espera.

Pela fórmula da convolução, a densidade de T é:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1).f_2(t-x_1)dx_1 = \int_0^t \frac{1}{3} e^{-x_1/3} \cdot \frac{1}{3} e^{-(t-x_1)/3} dx_1 = \frac{1}{9} e^{-t/3} \int_0^t dx_1$$

$$g(t) = \frac{1}{9} t.e^{-t/3} \quad \text{onde } t > 0$$

$$\Pr(T > 6) = \int_6^{\infty} \frac{1}{9} t.e^{-t/3} dt = \left\{ 1 - \int_0^6 \frac{1}{9} t.e^{-t/3} dt \right\} =$$

$$1) = 1 - \frac{1}{9} \left\{ \frac{1 - e^{-6/3} (1 + 6/3)}{(1/3)^2} \right\} = 1 - \frac{1}{9} \{ 9 [1 - 3.e^{-2}] \} =$$

$$= 1 - [1 - 3.e^{-2}] = +3.e^{-2} = 0.4060$$

$$\Pr(T < 4) = \int_0^4 \frac{1}{9} t.e^{-t/3} dt =$$

$$2) = \frac{1}{9} \left\{ \frac{1 - e^{-4/3} (1 + 4/3)}{(1/3)^2} \right\} = \frac{1}{9} \left\{ 9 \left[1 - \frac{7e^{-4/3}}{3} \right] \right\} =$$

$$= 1 - \frac{7e^{-4/3}}{3} = 1 - 0.6151 = 0.3849$$

Problema 7

O número de clientes que entram numa loja num dia qualquer é uma variável Poisson com média 10. A quantidade de dinheiro gasta por um cliente é uma variável Uniforme(0,150). Encontre a média e a variância da quantidade de dinheiro que a loja fatura num dia qualquer.

Solução

Seja T = quantidade total de dinheiro faturada pela loja num dia

$T = \sum_{i=1}^N X_i$ onde X_i é a quantidade de dinheiro gasta pelo i -ésimo cliente e N (uma variável aleatória Poisson) é o número de clientes que entram na loja naquele dia.

Vamos supor que os X_i 's são todos iid Uniforme(0,150).

Então, T é uma soma de um número aleatório de variáveis aleatórias.

Já vimos (vide aula 5) que:

$$E(T) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right)\right] = E(N \cdot E(X)) = E(N) \cdot E(X)$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}(T) &= \text{VAR}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E(\text{VAR}(T \mid N)) + \text{VAR}(E(T \mid N)) = \\ &= E(N \cdot \text{VAR}(X)) + \{E(X)\}^2 \cdot \text{VAR}(N) = \\ &= \text{VAR}(X) \cdot E(N) + \{E(X)\}^2 \cdot \text{VAR}(N) \end{aligned}$$

Assim, já que os X_i 's são todos iid Uniforme(0,150), $E(X) = 75$ e $\text{VAR}(X) = (150)^2/12$.

Também, como N é Poisson(10), $E(N) = \text{VAR}(N) = 10$.

Logo:

$$E(T) = 10(75) = 750 \text{ e}$$

$$\text{VAR}(T) = (150)^2 \cdot 10/12 + 10(75)^2 = 75000$$

Logo, o desvio padrão de T é, aproximadamente, 273.86

TEOREMA

Seja U uma variável Uniforme(0,1). Seja $X = F^{-1}(U)$. Então X tem função de distribuição F , ou seja, $\Pr(X \leq x) = F(x)$

DEMONSTRAÇÃO

$\Pr(X \leq x) = \Pr(F^{-1}(U) \leq x) = \Pr(U \leq F(x)) = F(x)$ pois U é Unif(0,1) e sua função de distribuição é apenas: $\Pr(U \leq u) = u$ desde que $0 < u < 1$.

Este teorema é muito importante na prática, pois nos permite simular variáveis aleatórias com uma função de distribuição $F(x)$ (e densidade $f(x) = dF/dx$) a partir de variáveis Unif(0,1), que estão disponíveis na maioria dos softwares e linguagens de programação.

Note que a transformação $X = (-1/l) \cdot \ln(U)$ para gerar uma variável Exponencial(l) pode ser interpretada exatamente neste contexto.

Problema 8

Seja $f(x) = a \cdot x^{-a-1}$ para $x \geq 1$, onde a é um parâmetro positivo.

- Use o teorema anterior para mostrar como podemos gerar uma v.a. X com esta densidade a partir de uma v.a. Uniforme(0,1).
- Gere 20000 v.a. Uniforme(0,1) no Excel. Use a transformação do item a) com parâmetro $a = 2$ e faça o histograma das variáveis geradas pelo processo. O histograma tem o mesmo aspecto da densidade teórica?
- Calcule, para a densidade com parâmetro $a = 2$, a $\Pr(1 < X < 2)$ e calcule empiricamente a mesma probabilidade, contando quantas das 20000 variáveis geradas, caem no intervalo (1,2).
- Repita o item c) para $\Pr(1 < X < 3)$.
- Nos itens c) e d), calcule o "erro" da aproximação por usar os dados simulados ao invés da probabilidade real como:

$$ERRO \ \% = \left| \frac{\text{prob_real} - \text{prob_aproximada}}{\text{prob_real}} \right|$$

O erro das aproximações é muito grande em c) e d)?

Solução

a) A função de distribuição acumulada de X é, para qualquer $t \geq 1$:

$$F(t) = \int_1^t a x^{-a-1} dx = a \cdot \frac{x^{-a}}{-a} \Big|_1^t = -x^{-a} \Big|_1^t = -\frac{1}{t^a} + 1 = 1 - \frac{1}{t^a}$$

Faça $U = F(X) = 1 - (1/X^a)$ e então: $X = F^{-1}(U) \Rightarrow 1/X^a = 1 - U \Rightarrow X^a = 1/(1-U) \Rightarrow 1/(1-U)^{1/a}$

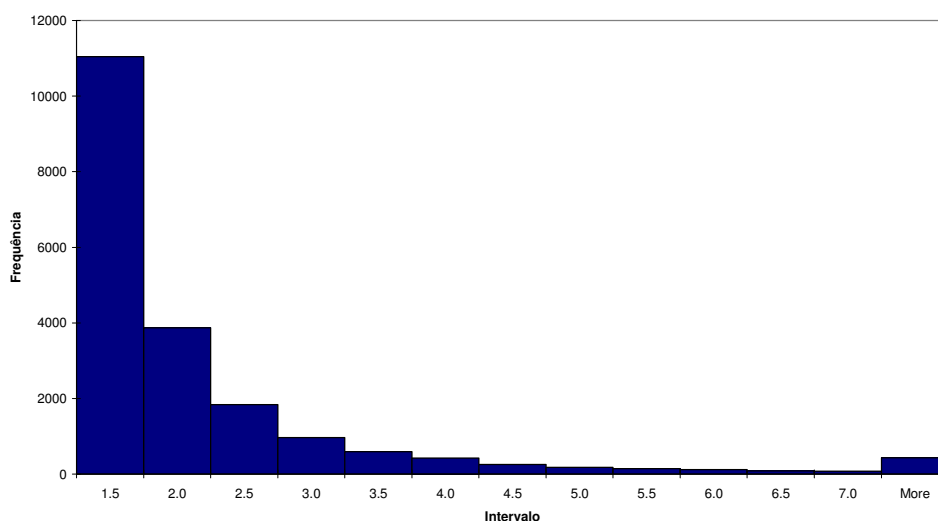
Esta última é a transformação que deve ser aplicada a uma variável Unif(0,1) para gerar X com a densidade indicada.

b) Se $a = 2$, a densidade de X é $f(x) = 2/x^3$ para $x \geq 1$.

A transformação para gerar variáveis aleatórias a partir da Uniforme(0,1) é:

$X = 1/(1-U)^{1/2}$ onde U é Unif(0,1).

Histograma - problema 8 - item b



c) A probabilidade real $\Pr(1 < X < 2)$ é apenas $F(2)$ para esta densidade, ou seja:

$$F(2) = \int_1^2 2x^{-3} dx = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

Podemos calcular empiricamente a partir dos 20000 valores gerados esta probabilidade, basta contar quantos deles são ≤ 2 .

Usando a função CONT.SE do Excel encontramos (nesta simulação) 14915 dos 20000 valores no intervalo $(1, 2]$. Portanto, a probabilidade desejada é aproximadamente $14915/20000 = 0.74575$.

d) A probabilidade verdadeira é agora:

$$F(3) = \int_1^3 2x^{-3} dx = 1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9} \approx 0.8889$$

Sua estimativa a partir dos dados simulados é novamente obtida pela função CONT.SE, que aponta 17708 valores ≤ 3 . Logo, a probabilidade estimada é aproximadamente $17708/20000 = 0.8854$.

O erro percentual da aproximação ao estimar $\Pr(1 < X < 2)$ é, neste caso:

$$| (0.75 - 0.74575)/0.75 | = 0.57\%$$

O erro percentual da aproximação ao estimar $\Pr(1 < X < 3)$ é, neste caso:

$$| (8/9 - 0.8854)/(8/9) | = 0.39\%$$

Problema 9

Considere a densidade Weibull do problema 2 (e os resultados do problema 2). Como você poderia usar uma v.a. Unif(0,1) para gerar uma v.a. Weibull?

Solução

Pelos resultados do problema 2: $Y = X^m$ é $\text{Expo}(1/\alpha)$. Logo, podemos facilmente gerar Y a partir de uma v.a. $\text{Uniforme}(0,1)$.

Na verdade: $Y = -\alpha \cdot \ln(U)$ e então $X^m = -\alpha \cdot \ln(U)$ e assim $X = (-\alpha \cdot \ln(U))^{1/m}$.

Problema 10

Seja X uma variável $\text{Uniforme}(-1,1)$. Mostre que $Y = |X|$ é $\text{Uniforme}(0,1)$.

Solução

A função que relaciona X e Y não é injetora e assim não podemos usar o método do jacobiano, temos que usar o método da função de distribuição.

A função de distribuição de Y é $G(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(|X| \leq y) = \Pr(-y \leq X \leq +y) = F(y) - F(-y)$, onde $F(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada de X .

Mas, quem é F ?

Das propriedades de uma v.a. Uniforme sabemos que:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1 \\ \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{x+1}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq +1 \\ 1 & \text{se } x > +1 \end{cases}$$

Então, olhando só para a parte que interessa (dentro do intervalo $[-1,+1]$) temos:

$$G(y) = \frac{y+1}{2} - \frac{-y+1}{2} = \frac{y+1+y-1}{2} = y \text{ para } 0 \leq y \leq 1$$

Esta é a função de distribuição acumulada de uma v.a. $\text{Unif}(0,1)$. Logo, Y é $\text{Uniforme}(0,1)$.

Problema 11

A velocidade de uma molécula de gás é uma variável aleatória contínua V com densidade dada por:

$$f(v) = a \cdot v^2 \cdot e^{-bv^2}, \text{ onde } b \text{ é uma constante que depende do gás e } v > 0$$

Onde $a > 0$ é uma constante determinada a partir do fato de $f(v)$ integrar a 1 no intervalo $(0, +\infty)$. Seja Z a energia cinética da molécula de gás, dada por:

$$Z = \frac{mV^2}{2}$$

Encontre a densidade de Z (você pode usar o método do Jacobiano ou o da função de distribuição)

Solução

Como V é positiva, a transformação que relaciona V e Z é injetora. A transformação inversa é:

$$V = \sqrt{\frac{2Z}{m}} \Rightarrow \frac{dV}{dZ} = \sqrt{\frac{2}{m}} \left(\frac{1}{2\sqrt{Z}} \right) = \sqrt{\frac{1}{2mZ}}$$

A densidade de Z é:

$g(z) = a \left(\frac{2z}{m} \right) \exp \left\{ \frac{-b(2z)}{m} \right\} \sqrt{\frac{1}{2mz}} = a \sqrt{\frac{2}{m^3}} z^{1/2} e^{-2bz/m}$, ou seja, é uma densidade Gama, basta "acertar" os parâmetros.

Problema 12

A duração (Y) de componentes eletrônicos é às vezes modelada pela densidade Rayleigh, mostrada a seguir.

$$f(y) = \left(\frac{2y}{\theta} \right) \exp \left\{ \frac{-y^2}{\theta} \right\} \quad \text{onde } y > 0$$

Encontre a densidade de $U = Y^2$.

Use o resultado acima para achar a média e variância de U.

Solução

Note que a função que relaciona Y e U é injetora pois $y > 0$.

A densidade de U é:

$$g(u) = \left(\frac{2\sqrt{u}}{\theta} \right) \exp \left(\frac{-u}{\theta} \right) \left| \frac{1}{2\sqrt{u}} \right| = \left(\frac{2\sqrt{u}}{\theta} \right) \exp \left(\frac{-u}{\theta} \right) \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{\theta} \cdot \exp \left(\frac{-u}{\theta} \right) \quad \text{para } u > 0$$

Então U é Exponencial com média θ .

Problema 13

Seja Y o número de clientes que entram numa loja de roupas num shopping num dia. Y é uma v.a. Poisson com média M onde M é, por sua vez, uma v.a. Gama, pois depende de coisas como: a localização do shopping, a atividade econômica do país, a renda do consumidor, etc...

Suponha que, numa determinada localidade, M seja uma variável Gama com média 16 e desvio padrão 8.

- Calcule a função de probabilidade marginal de Y .
- Calcule a densidade condicional de M dado $Y = y$.

Suponha agora que, noutra localidade, M é uma variável Gama com média 16 e desvio padrão 4.

- Calcule a função de probabilidade marginal de Y .
- Calcule a densidade condicional de M dado $Y = y$.
- Faça os gráficos das densidades de M nos dois casos apresentados.

Solução

Este é basicamente o exemplo 4 da aula 7.

O primeiro passo é descobrir quais os parâmetros das densidades Gama que estão sendo mencionadas no problema.

Nos itens a) e b), M é Gama com média 16 e desvio padrão 8 (variância 64). Sejam a e b os parâmetros desta densidade. Então:

$$\frac{a}{b} = 16$$

$$\frac{a}{b^2} = 64 \Rightarrow \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b} \right) = 64 \Rightarrow \frac{1}{b} (16) = 64 \Rightarrow 64b = 16 \Rightarrow b = 16/64 = 1/4 = 0.25$$

Então

$$\frac{a}{1/4} = 16 \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4$$

Da aula 7 segue que a função de probabilidade marginal de Y é:

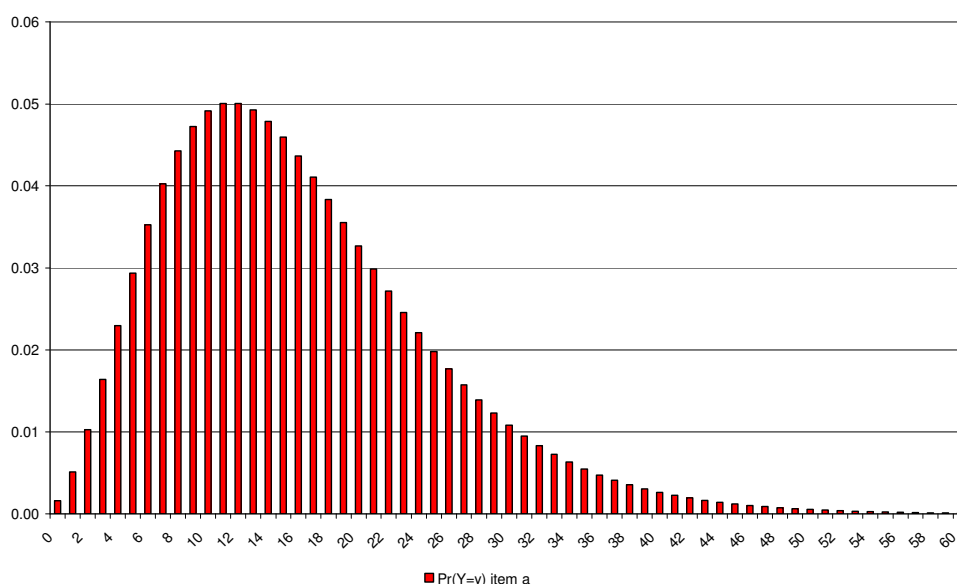
$$\begin{aligned}
 f_Y(y) = \Pr(Y = y) &= \frac{b^a}{y! \Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a+y-1} e^{-(b+1)u} du = \\
 &= \frac{b^a}{y! \Gamma(a)} \int_0^\infty \left(\frac{t}{b+1}\right)^{a+y-1} e^{-t} \frac{dt}{b+1} = \\
 &= \frac{b^a}{y! \Gamma(a)} \left(\frac{1}{b+1}\right)^{a+y} \int_0^\infty t^{a+y-1} e^{-t} dt = \\
 &= \frac{b^a}{y! \Gamma(a)} \left(\frac{1}{b+1}\right)^{a+y} \Gamma(a+y) = \frac{b^a \Gamma(a+y)}{y! \Gamma(a) (b+1)^{a+y}}
 \end{aligned}$$

E substituindo os valores de a e b acima leva a:

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) = \Pr(Y = y) &= \frac{b^a \Gamma(a+y)}{y! \Gamma(a) (b+1)^{a+y}} = \frac{(1/4)^4 \Gamma(y+4)}{y! \Gamma(4) (5/4)^{y+4}} = \frac{1}{(256)(6)} \frac{(y+3)!}{y!} \left(\frac{4}{5}\right)^{y+4} = \\
 &= \frac{1}{(256)(6)} \frac{256}{625} \frac{(y+3)(y+2)(y+1)y!}{y!} \left(\frac{4}{5}\right)^y = \\
 &= \frac{(y+3)(y+2)(y+1)}{6(625)} \left(\frac{4}{5}\right)^y \quad \text{para } y = 0, 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

O gráfico desta função de probabilidade para $y = 0, 1, \dots, 60$ é mostrado a seguir.

Problema 13 - item a - Função de Probabilidade Marginal de Y (para $y = 0, 1, 2, \dots, 60$)



b) A densidade condicional de M dado $Y = y$ é, pelos resultados da aula 7, $\text{Gama}(a + y, b+1)$. Ou seja, neste caso, M dado $Y = y$ é $\text{Gama}(y+4, 5/4)$.

c) Novamente o primeiro passo é encontrar os parâmetros que definem a densidade Gama. Analogamente ao item a):

M é Gama com média 16 e desvio padrão 4 (variância 16). Sejam \underline{a} e \underline{b} os parâmetros desta densidade. Então:

$$\frac{a}{b} = 16$$

$$\frac{a}{b^2} = 16 \Rightarrow \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b} \right) = 16 \Rightarrow \frac{1}{b} (16) = 16 \Rightarrow b = 1$$

Então

$$\frac{a}{1} = 16 \Rightarrow a = 16$$

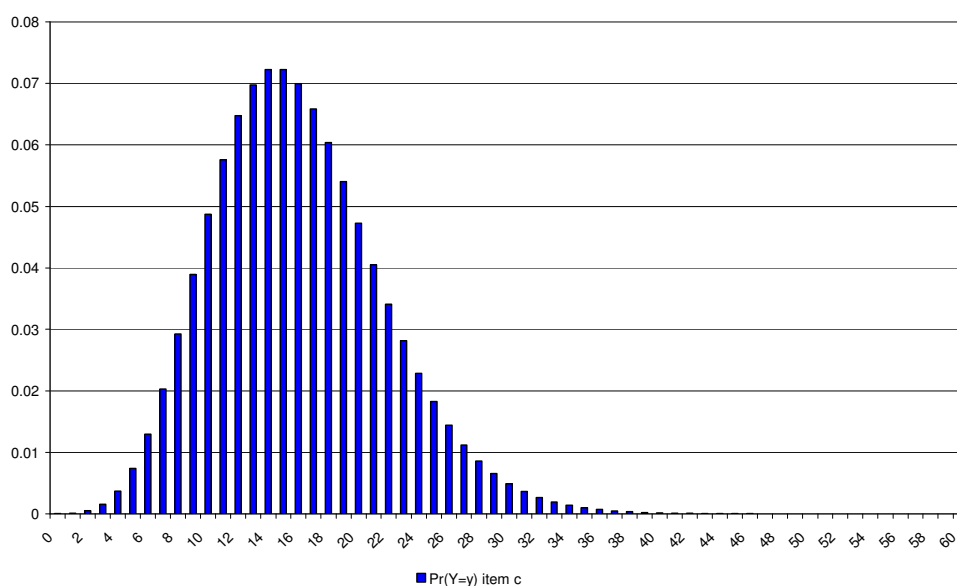
Logo, M tem uma Gama($a = 16, b = 1$) neste caso.

$$f_Y(y) = \Pr(Y = y) = \frac{b^a \Gamma(a + y)}{y! \Gamma(a) (b + 1)^{a+y}} = \frac{\Gamma(y + 16)}{y! \Gamma(16) (2)^{y+16}} = \frac{(y + 15)!}{y!} \frac{1}{15! (2)^{y+16}}$$

para $y = 0, 1, 2, 3, \dots$

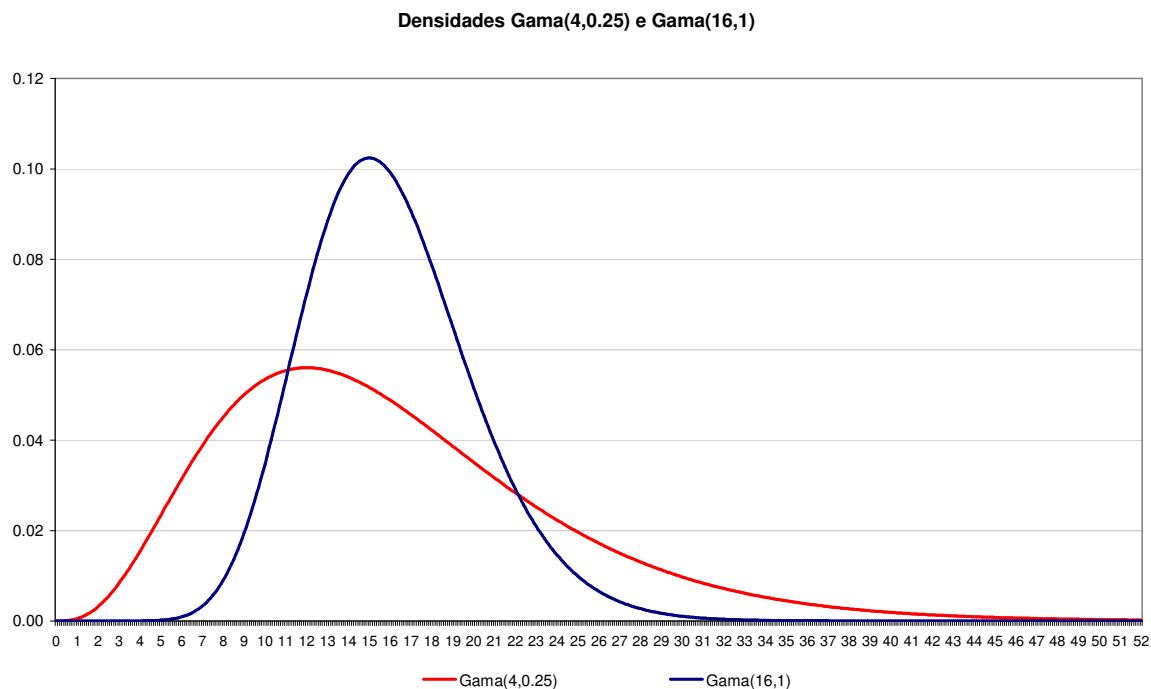
O gráfico desta função de probabilidade é

Problema 13 - item c - Função de Probabilidade Marginal de Y (para $y = 0, 1, 2, \dots, 60$)



d) A densidade condicional de M dado $Y = y$ é, pelos resultados da aula 7, Gama($a + y, b + 1$). Ou seja, neste caso, M dado $Y = y$ é Gama($y + 16, 2$).

e) Os gráficos das densidades Gama(4,0.25) e Gama(16,1) são mostrados a seguir:



Problema 14

Considere o problema anterior.

Suponha ainda que, dado $M = m$, Y é $\text{Poisson}(m)$, mas agora M é uma variável DISCRETA com a seguinte função de probabilidade:

m	$\Pr(M=m)$
2	0.4
3	0.3
4	0.2
5	0.1

- Qual a função de probabilidade marginal de Y ?
- Qual a função de probabilidade condicional de M dado $Y = y$?

Solução

Veja o exemplo inicial da aula 8.

Para conseguir escrever de maneira apropriada a conjunta de M e Y e, em seguida, calcular o que foi pedido no problema, é interessante lembrar a notação de indicadores:

$$I_A(m) = \begin{cases} 1 & \text{se } m \in A \\ 0 & \text{se } m \notin A \end{cases}$$

Então podemos escrever a função de probabilidade de M como:

$$f_M(m) = 0.4I_{\{m=2\}} + 0.3I_{\{m=3\}} + 0.2I_{\{m=4\}} + 0.1I_{\{m=5\}}$$

Logo, a função de probabilidade conjunta de Y e M é dada por:

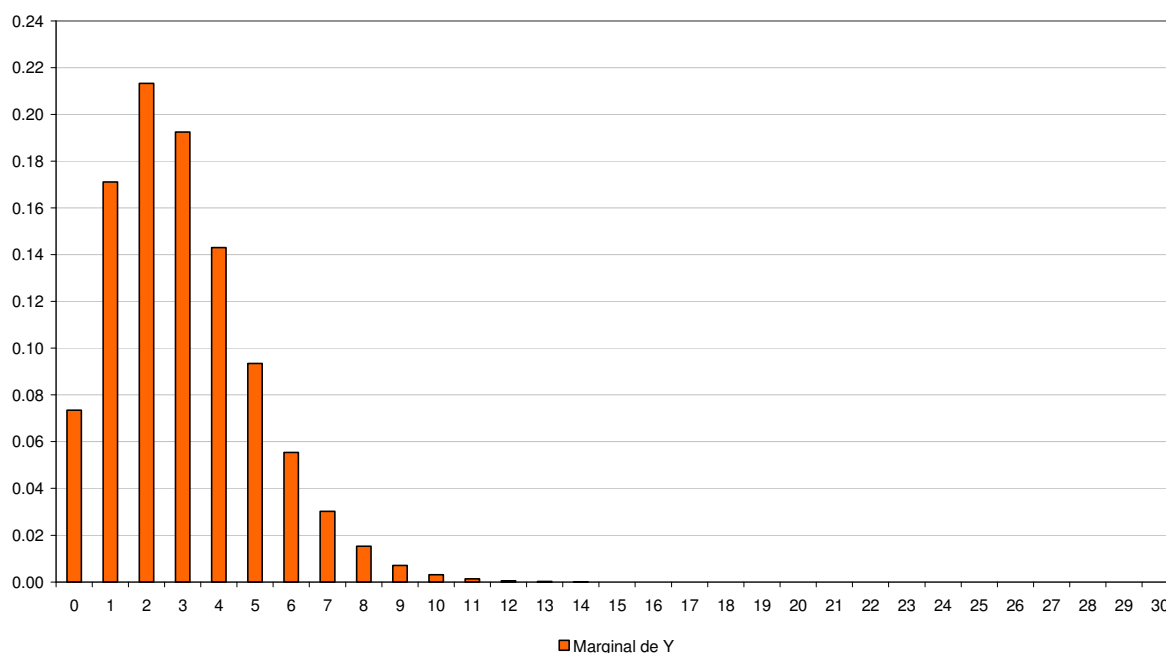
$$f(y, m) = f(y|m) \cdot f_M(m)$$

$$f(y, m) = 0.4I_{\{m=2\}} \frac{e^{-2}(2)^y}{y!} + 0.3I_{\{m=3\}} \frac{e^{-3}(3)^y}{y!} + 0.2I_{\{m=4\}} \frac{e^{-4}(4)^y}{y!} + 0.1I_{\{m=5\}} \frac{e^{-5}(5)^y}{y!}$$

para $y = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $m = 2, 3, 4, 5$

A marginal de Y é a soma desta conjunta para todo m, ou seja, é a soma ponderada destas Poissons para os 4 valores possíveis de M. Seu gráfico está a seguir:

Problema 14 - Função de Probabilidade Marginal de Y



A tabela contendo algumas probabilidades calculadas para esta marginal está a seguir.

y	Poisson(2)	Poisson(3)	Poisson(4)	Poisson(5)	Marginal de Y
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0734
1	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.1711
2	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.2132
3	0.1804	0.2240	0.1954	0.1404	0.1925
4	0.0902	0.1680	0.1954	0.1755	0.1431
5	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.0935
6	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.0554
7	0.0034	0.0216	0.0595	0.1044	0.0302
8	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.0153
9	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0072
10	0.0000	0.0008	0.0053	0.0181	0.0031

b) a função de probabilidade condicional de M dado $Y = y$?

Note que a função de probabilidade desejada explicitará as probabilidades de $M = 2, 3, 4, 5$ após observar $Y = y$. Ela é apenas a conjunta dividida pela marginal de Y.

Por exemplo:

$$f(2|Y = y) = \frac{0.4e^{-2}(2)^y}{y!}{0.4\frac{e^{-2}(2)^y}{y!} + 0.3\frac{e^{-3}(3)^y}{y!} + 0.2\frac{e^{-4}(4)^y}{y!} + 0.1\frac{e^{-5}(5)^y}{y!}} =$$

$$= \frac{0.4e^{-2}(2)^y}{0.4e^{-2}(2)^y + 0.3e^{-3}(3)^y + 0.2e^{-4}(4)^y + 0.1e^{-5}(5)^y}$$

Analogamente:

$$f(3|Y = y) = \frac{0.3e^{-3}(3)^y}{0.4e^{-2}(2)^y + 0.3e^{-3}(3)^y + 0.2e^{-4}(4)^y + 0.1e^{-5}(5)^y}$$

$$f(4|Y = y) = \frac{0.2e^{-4}(4)^y}{0.4e^{-2}(2)^y + 0.3e^{-3}(3)^y + 0.2e^{-4}(4)^y + 0.1e^{-5}(5)^y}$$

$$f(5|Y = y) = \frac{0.1e^{-5}(5)^y}{0.4e^{-2}(2)^y + 0.3e^{-3}(3)^y + 0.2e^{-4}(4)^y + 0.1e^{-5}(5)^y}$$

Intuitivamente, o valor observado de Y fornece informações sobre M . Assim, se inicialmente (sem observar $Y = y$), acreditávamos que a função de probabilidade de M era a indicada acima, esta "crença" mudará de acordo com os valores observados de Y .

Por exemplo, se observamos $Y = 0$:

m	Pr(M=m Y=y)
2	0.7375
3	0.2035
4	0.0499
5	0.0092

Se observamos $Y = 4$:

m	Pr(M=m Y=y)
2	0.2522
3	0.3522
4	0.2730
5	0.1226

Se observamos $Y = 8$:

m	Pr(M=m Y=y)
2	0.0225
3	0.1593
4	0.3903
5	0.4279

Verifique os valores encontrados nas tabelas anteriores e calcule as funções de probabilidade condicionais para outros valores de y .

Problema 15

Seja X uma variável $N(\mu, \sigma^2)$. Ache a densidade de $Y = e^X$. Y é uma variável LOGNORMAL.

Solução

A densidade de X é:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \text{ para } \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma^2 > 0$$

Seja $Y = \exp(X)$. Note que $Y > 0$. Esta transformação é injetora e sua inversa é $X = \ln(Y)$. $dx/dy = d(\ln(y))/dy = 1/y > 0$ é o jacobiano da transformação.

A densidade de Y é:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{y} \text{ para } y > 0$$

Problema 16

Seja X uma variável Exponencial(λ). Ache a densidade de $Y = cX$, onde c é uma constante positiva.

Solução

Ambos X e Y são definidos nos reais positivos. A transformação que os relaciona é injetora e sua inversa é $x = y/c$ e então $dx/dy = 1/c$.

A densidade de Y é:

$$g(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda\left(\frac{y}{c}\right)} \frac{1}{c} = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}y}, \text{ ou seja, } Y \text{ tem densidade Exponencial com parâmetro } (\lambda/c).$$