**ENCE – CÁLCULO DE PROBABILIDADE II**

**Semestre 2009.01 – Profa. Monica Barros**

**Lista de exercícios 3**

## Problema 1

Sejam $X_1$ e $X_2$ independentes com densidades Gama($a_1$, b) e Gama($a_2$, b) respectivamente.

Mostre que $Y = X_1/X_2$ tem densidade:

$$g(y) = \frac{\Gamma(a_1 + a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \frac{y^{a_2 - 1}}{(y+1)^{a_1 + a_2}} \quad \text{para } y > 0$$

Esta densidade é chamada de densidade Beta do segundo tipo.

## Problema 2

Sejam $X_1$ e $X_2$ independentes com densidades $N(0,\sigma^2)$.

Mostre que $Y = X_1^2/X_2^2$ tem densidade:

$$g(y) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)} \frac{y^{-1/2}}{(y+1)} = \frac{1}{\pi(y+1)\sqrt{y}} \quad \text{para } y > 0$$

Dica: use o fato de que o quadrado de uma N(0,1) é Qui-quadrado com 1 grau de liberdade, e esta é apenas um caso particular da Gama. Também note que $\Gamma(1/2) = (\pi)^{1/2}$.

## Problema 3

Sejam $X_1$ e $X_2$ independentes com densidades Qui-Quadrado com m e n graus de liberdade, respectivamente.

Então:

$Y = \dfrac{X_1/m}{X_2/n}$ tem densidade F com m graus de liberdade no numerador e n graus no denominador, e mostre que sua densidade é dada por:

$$g(y)=\frac{(m/n)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m.y}{n}\right)^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{m.y}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}}} \quad \text{para } y>0$$

## Problema 4

Seja X uma variável Beta(m,n) onde ambos m e n são > 1. Para que valor f(x) tem um máximo. Em outras palavras, qual é a moda da densidade Beta(m, n)?

## Problema 5

Considere um ponto escolhido aleatoriamente no plano de tal forma que suas coordenadas $X_1$ e $X_2$ são independentes com densidades $N(0,\sigma^2)$. Seja $R = (X_1^2 + X_2^2)^{1/2}$ a variável que indica a distância do ponto à origem.

Mostre que R tem densidade Rayleigh, dada por:

$$g(r)=\frac{r}{\sigma^2}e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}} \quad \text{para } r>0$$

## Problema 6

Sejam $X_1$ e $X_2$ independentes com densidades $N(0,\sigma^2)$. Mostre que $Y = X_1/X_2$ tem densidade Cauchy, dada por:

$$g(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)} \quad \text{para y real}$$

## Problema 7

Sejam $X_1$ e $X_2$ independentes com densidades N(0, 1). Seja:

$$Z=\rho.X_1+X_2.\sqrt{1-\rho^2} \quad \text{onde} \quad -1<\rho<+1$$

a) Mostre que Z tem densidade N(0,1).

b) Ache a densidade conjunta de $X_1$ e Z.

## Problema 8

Sejam $X_1$ e $X_2$ variáveis independentes com densidades Gama($a_1$, b) e Gama($a_2$, b) respectivamente. Mostre que $X_1/X_2$ e $X_1 + X_2$ são independentes e encontre suas densidades. Dica: vide problema 1.

## Problema 9

Sejam R e Q variáveis aleatórias independentes tais que R tem densidade Rayleigh (vide problema 5) e Q é Uniforme no intervalo ($-\pi$, $+\pi$). Mostre que X = R.cos Q e Y = R.sen Q são variáveis independentes e cada uma tem densidade $N(0,\sigma^2)$.

## Problema 10

Considere Y encontrado no problema 1.

Ache a densidade de $Z = 1/(1+Y) = X_2/(X_1 + X_2)$

## Problema 11

Suponha que X tem densidade Beta(m, n) onde m, n > 1. Encontre a densidade de Y = = -ln(X).

## Problema 12

Suponha que X tem densidade Pareto, isto é:

$$f(x) = a.x^{-a-1} \quad \text{para } x \geq 1 \text{ e } a > 0$$

Encontre a densidade de Y = ln(X).