

ENCE – CÁLCULO DE PROBABILIDADE II**Semestre 2009.01 – Profa. Monica Barros****Lista de exercícios 4****Problema 1**

Considere uma amostra de tamanho 10 da densidade Uniforme(0,1).

Seja $X_{(k)}$ a k -ésima estatística de ordem, $k = 1, 2, \dots, 10$

- 1) Qual a probabilidade de $X_{(3)}$ estar no intervalo (0.3, 0.5)?
- 2) Qual a probabilidade da amplitude amostral ser maior que 0.7?

Suponha agora que lidamos com uma amostra de tamanho n da densidade Uniforme(0,1).

- 3) Qual a probabilidade da amplitude amostral ser maior que a ? Isso significa que com probabilidade $100.a\%$ uma observação qualquer da amostra Unif(0,1) estará contida entre os valores mínimo e máximo já observados.

Problema 2

Sejam X_1, \dots, X_4 iid com a seguinte densidade: $f(x) = 2x$ se $0 < x < 1$.

Calcule a probabilidade de $X_{(3)}$ ser maior que 0.4

Problema 3

Considere uma amostra de tamanho $(2n + 1)$ da densidade Uniforme(0,1).

A MEDIANA da amostra será a n -ésima estatística de ordem.

- 1) Qual a sua densidade?
- 2) Qual a média e a variância desta densidade?
- 3) Sabendo que cada X_i tem média $\frac{1}{2}$ e variância $\frac{1}{12}$, calcule a média e a variância da média amostral. Compare-as com os valores obtidos para a mediana amostral.

Problema 4

Considere uma amostra de tamanho n da densidade Exponencial com média 1.

- 1) Escreva a densidade do mínimo.
- 2) Escreva a densidade do máximo.
- 3) Escreva a densidade da amplitude.
- 4) Qual a probabilidade do máximo exceder 2 quando a amostra tem tamanho 5? E quando tem tamanho 10?

Definição – momento fatorial de ordem s (s inteiro > 1)

O momento fatorial de ordem s da variável aleatória X é o valor esperado da função:

$$g(X) = X(X-1)(X-2)\dots(X-s+1)$$

Assim, o momento fatorial de 1ª. ordem de X é apenas $E(X)$, o de 2ª. ordem é $E\{X(X-1)\}$ e etc....

Problema 5

Seja X uma variável Binomial(n,p).

Mostre que o momento fatorial de ordem s (para s inteiro > 1) é:

$$E\{X(X-1)\dots(X-s+1)\} = n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1).p^s$$

Problema 6

Seja X uma variável Poisson(λ). Encontre o momento fatorial de ordem s .

Problema 7

Seja X uma variável Exponencial(λ). Encontre o 2º. momento fatorial de X .

Problema 8

Repita o problema 7 quando X é Qui-quadrado com k graus de liberdade.

Definição – Função Característica

A função característica de X , $\phi(t)$ é definida como:

$$\phi(t) = E(e^{itX}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \\ \sum_{\text{todo } x} e^{itx} \Pr(X = x) \end{cases}$$

Note que a função característica é uma função complexa de X , pois:

$$\phi(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX) + i.\text{sen}(tX)) = E(\cos(tX)) + i.E(\text{sen}(tX))$$

Propriedades da função característica

- 1) $\phi(t)$ sempre existe
- 2) $\phi(0) = 1$
- 3) O k -ésimo momento de X pode ser obtido da função característica através de:

$$E(X^k) = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k \phi(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$$

Problema 8

Seja X uma variável Exponencial(λ). Calcule sua fgm e sua função característica.

Problema 9

Seja Z uma variável $N(0,1)$. Encontre sua fgm. Use-a para obter a fgm de uma v.a. Normal com média a e variância b^2 .

Problema 9

Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade:

$$f(x) = q.p^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e } q = 1 - p \quad \text{onde } 0 < p < 1$$

Calcule a função geradora de momentos de X .

A partir da função geradora de momentos, encontre a média e a variância de X .

Dica - use a série geométrica.

Problema 10

Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade Poisson com média λ .

Encontre a função geradora de momentos e use-a para mostrar que:

$$E(X) = \text{VAR}(X) = \lambda$$

Dica: lembre-se da série de Taylor da exponencial.

Problema 11

Seja X uma v.a. com fgm $M(t)$ que é finita num intervalo aberto contendo zero.

Seja $Q(t) = \ln(M(t))$.

Mostre que a média e a variância de X são dadas, respectivamente, por $Q'(0)$ e $Q''(0)$.

Problema 12

Seja X uma variável Gama(a, b).

Mostre que sua fgm é $(b/(b-t))^a$ e que a fgm só existe se $t < b$.

Aproveite para encontrar (são casos particulares) a fgm de uma variável Qui-Quadrado com k graus de liberdade e a fgm de uma variável Exponencial com parâmetro a (e média $1/a$).

Problema 13

1) Sejam X_1, \dots, X_n iid Qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

Use a fgm para provar que a soma dos X 's é Qui-Quadrado com n graus de liberdade.

2) Suponha agora que os X_i 's são independentes, X_i é Qui-Quadrado com k_i graus de liberdade. Use a fgm para provar que a soma dos X 's é Qui-Quadrado com $k_1+k_2+k_3+\dots+k_n$ graus de liberdade.

Problema 14

Sejam X_1, \dots, X_n iid Exponencial(λ). Ache a densidade de

$$Y = 2\lambda \sum_{i=1}^n X_i \text{ usando a fgm.}$$

Definição – Função Geradora de Probabilidades

Seja X uma variável discreta com valores inteiros. A função geradora de probabilidades de X é definida como:

$$G(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \cdot \Pr(X = x)$$

Problema 15

Usando a função geradora de probabilidades definida acima, mostre que:

$$1) \Pr(X = k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k G(s)}{ds^k} \right|_{s=0}$$

$$2) E(X) = \left. \frac{dG}{ds} \right|_{s=1}$$

$$3) E(X(X-1)) = \left. \frac{d^2 G}{ds^2} \right|_{s=1}$$

4) Expresse a função geradora de probabilidades em termos da função geradora de momentos.

Problema 16

Encontre a função geradora de probabilidades de uma v.a. Poisson e, a partir dela, a média e a variância de X .

Problema 17

Encontre a função geradora de probabilidades de uma v.a. Geométrica e, a partir dela, a média e a variância de X .

Problema 18

Uma empresa administra dois shopping-centers localizados em diferentes áreas da cidade.

No primeiro shopping verificou-se que um consumidor gasta em média R\$ 600,00 em compras de Natal. A dispersão entre os valores gastos, medida pelo desvio padrão, é R\$ 240,00.

No segundo shopping, o gasto médio por consumidor em compras de Natal é R\$ 400,00 e o desvio padrão dos gastos é R\$ 160,00.

Além disso, pode-se encarar os valores gastos em compras de Natal pelos consumidores nos dois shoppings como variáveis Normais correlacionadas, com coeficiente de correlação + 0.60.

- 1) Qual a probabilidade de um consumidor gastar entre R\$ 400 e R\$ 840 em compras de Natal no primeiro shopping?
- 2) Qual a probabilidade de um consumidor gastar entre R\$ 400 e R\$ 840 em compras de Natal no primeiro shopping sabendo que um consumidor com perfil semelhante gastou R\$ 560 no segundo shopping?
- 3) Qual a probabilidade de um consumidor gastar entre R\$ 400 e R\$ 840 em compras de Natal no primeiro shopping sabendo que um consumidor com perfil semelhante gastou R\$ 200 no segundo shopping?
- 4) Qual a distribuição de probabilidade dos gastos de um consumidor no 2º shopping sabendo que um consumidor semelhante gastou R\$ 960 no primeiro shopping?
- 5) Qual a distribuição de probabilidade dos gastos de um consumidor no 2º shopping sabendo que um consumidor semelhante gastou R\$ 480 no primeiro shopping?

Problema 19

Considere os preços do litro das gasolinas aditivada e premium nos postos. Uma amostra de postos revela que os preços por litro da gasolina aditivada têm distribuição Normal com média R\$ 2,50 e desvio padrão R\$ 0,15. Os preços por litro da gasolina premium têm distribuição Normal com média 2,65 e desvio padrão R\$ 0,20. A correlação entre os preços das duas gasolinas é 80%. Calcule as seguintes probabilidades:

- a) De alguém pagar entre R\$ 2,275 e R\$ 2,725 por um litro de gasolina aditivada.
- b) De alguém pagar entre R\$ 2,275 e R\$ 2,725 por um litro de gasolina aditivada sabendo que neste posto o litro da gasolina premium custa R\$ 2,85.
- c) De alguém pagar entre R\$ 2,275 e R\$ 2,725 por um litro de gasolina aditivada sabendo que neste posto o litro da gasolina premium custa R\$ 2,55.
- d) Qual é a distribuição condicional dos preços da gasolina premium sabendo que o preço praticado da gasolina aditivada é R\$ 2,725 por litro?
- e) Qual é a distribuição condicional dos preços da gasolina premium sabendo que o preço praticado da gasolina aditivada é R\$ 2.275 por litro?
- f) Toma-se uma amostra de 9 postos. Qual a probabilidade do preço médio da gasolina aditivada na amostra exceder R\$ 2.575?

Problema 20

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes, onde X_1 tem função de probabilidade Binomial (n_1, p) e X_2 tem função de probabilidade Binomial (n_2, p) .

Mostre, usando a função geradora de momentos, que $Y = X_1 + X_2$ tem função de probabilidade Binomial $(n_1 + n_2, p)$.

Dica – se quiser você pode usar, alternativamente, a função característica ou a função geradora de probabilidades.