ENCE – CÁLCULO DE PROBABILIDADE II

Semestre 2009.01 – Profa. Monica Barros

Lista de exercícios 5

Problema 1

Seja X uma variável aleatória discreta com valores maiores ou iguais a zero. Seja G(s) = E(sx) a função geradora de probabilidades de X, e suponha que G(s) é finita para todo s. Seja u um número positivo qualquer.

Usando o mesmo tipo de argumentos que na demonstração da desigualdade de Chebyshev prove que:

$$\Pr(X \leq u) \leq \frac{G(s)}{s^u}, 0 \leq s \leq 1$$

Problema 2

Seja X ~ Poisson(λ). Use as desigualdades de Chebyshev e Markov para mostrar que:

$$\Pr\left(X \leq \frac{\lambda}{2}\right) \leq \frac{4}{\lambda}$$

$$\Pr(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$$

Problema 3

Método de Monte Carlo.

Suponha que desejamos avaliar:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Seja g(x) uma densidade em [a, b].

Gere X1, X2, ..., Xn da densidade g(x) e estime I através de:

$$\hat{I}(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(X_i)}{g(X_i)}$$

a) Use este exemplo para definir um procedimento para avaliar uma integral definida no intervalo [-1,+1]

b) Você consegue usar este esquema para avaliar:

$$I(f) = \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx$$

c) E para avaliar a mesma integral que acima mas no intervalo (0,2)?

Problema 4

Numa certa empresa de computação, o salário anual médio dos funcionários com menos de 5 anos de experiência é R$ 36000, com desvio padrão de R$ 1800. Toma-se uma amostra de 36 funcionários com menos de 5 anos de experiência. Qual a probabilidade do salário médio na amostra exceder R$ 36500?

Problema 5

Um elevador pode transportar até 10 passageiros. O peso de cada passageiro é uma variável aleatória com média 70 kg e desvio padrão 10 kg. Normas de segurança estabelecem que o peso máximo transportado no elevador não pode exceder 715 kg mais de 5% do tempo.

a) Qual a probabilidade de que o peso total dos passageiros exceda 715 kg?

b) Encontre o percentil 95% da distribuição do peso total dos passageiros do elevador. As normas de segurança estão sendo obedecidas?

Problema 6

Sejam X_1 , X_2 , ... , X_n iid $N(0, \sigma^2)$.

a) Qual a média e variância de X_i^2 ?

b) Como aproximar $\Pr\{ X_1^2 + X_2^2 + ...+ X_n^2 \leq x)$ em termos de $\Phi(.)$?

Problema 7

Sejam X_1 , X_2 , ... , X_n iid $N(0, 1)$.

a) Calcule $\Pr\{ X_1^2 + X_2^2 + ...+ X_{100}^2 \leq 120)$

b) Calcule $\Pr\{ 80 \leq X_1^2 + X_2^2 + ...+ X_{100}^2 \leq 120)$

c) Ache c tal que $\Pr\{ X_1^2 + X_2^2 + ...+ X_{100}^2 \leq 100 + c) = 0.95$

Problema 8

Seja $f(x) = 1/x^2$ onde $x > 1$. Considere uma amostra aleatória de tamanho 72 desta densidade e calcule aproximadamente a probabilidade de que mais do que 50 ítens na amostra sejam menores que 3.

Problema 9

O número de acidentes de trânsito numa estrada é uma variável aleatória N com distribuição Poisson com média 100. Use a aproximação Normal para encontrar k tal que:

$Pr(100 - k < N < 100 + k) \approx 0.90$

amostra sejam menores que 3.

Problema 10

Você joga R$ 5 em cada repetição independente de um jogo no qual a probabilidade de ganhar é 50%. Use o Teorema Central do Limite para aproximar a probabilidade de que, após 50 jogadas, você terá perdido mais de R$75.

amostra sejam menores que 3.

Problema 11

Seja Z_n uma variável aleatória Poisson(n). Mostre que a distribuição limite de $Y_n = \frac{Z_n - n}{\sqrt{n}}$ é N(0,1).