ENCE – TEORIA DE PROBABILIDADE II – SEMESTRE 2009.01 – Profa. Mônica Barros
Teste 1 – 11/05/2009
GABARITO

Problema 1

Seja X uma v.a. contínua com densidade:

$f(x) = \dfrac{3}{x^4}$ para x > 1

Calcule E(X | X > 2).

Solução

Em primeiro lugar é preciso determinar quem é a densidade definida apenas no intervalo (2, ∞). Note que esta precisa ser uma densidade propriamente dita, ou seja, integrar a um.

Então precisamos achar uma constante <u>c</u> tal que:

$$\int_2^\infty c\frac{3}{x^4}dx = 1 \Rightarrow 3c\left(\frac{x^{-3}}{-3}\right)\Bigg|_2^\infty = -c.x^{-3}\Big|_2^\infty = 1 \Rightarrow -c\left(0-\frac{1}{8}\right) = \frac{c}{8} = 1 \Rightarrow c = 8$$

Logo, a densidade definida apenas em x > 2 é:

$g(x) = \dfrac{24}{x^4}$ para x > 2

E(X| X > 2) = $\displaystyle\int_2^\infty x\frac{24}{x^4}dx = 24\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)\Bigg|_2^\infty = -12x^{-2}\Big|_2^\infty = -12\left(0-\frac{1}{x^2}\right)\Bigg|_2^\infty = \frac{12}{4} = 3$

Problema 2

A densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x,y) = \frac{ke^{-y}}{y} \quad \text{se } 0 < x < 2y \text{ e } y > 0$$

a) Ache a constante k que faz de f(x,y) uma densidade.

b) Ache a média condicional de X dado Y = y.

c) Ache a variância condicional de X dado Y = y.

Solução

A constante k é tal que a densidade conjunta tem integral (dupla) igual a um. Logo:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2y} k.\frac{e^{-y}}{y}dxdy = \int_0^{\infty} k(2y)\frac{e^{-y}}{y}dy = \int_0^{\infty} 2k\left(e^{-y}\right)dy = 2k\int_0^{\infty}\left(e^{-y}\right)dy = 2k(1) = 1 \Rightarrow k = 1/2$$

b) O próximo passo é encontrar a densidade condicional de X dado Y = y. Esta é dada pela razão da conjunta pela marginal de Y.

A marginal de Y é:

$$f_Y(y) = \int_0^{2y}\frac{e^{-y}}{2y}\,\mathrm{dx} \quad = 2\mathrm{y}.\frac{e^{-y}}{2y} = e^{-y} \quad \text{para } \mathrm{y} > 0$$

Ou seja, a marginal de Y é uma Exponencial com média 1.

c) A densidade condicional de X dado Y = y é:

$$f(x \mid y)) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-y}/2y}{e^{-y}} = \frac{1}{2y} \quad \text{para } 0 < \mathrm{x} < 2\mathrm{y}$$

Ou seja, DADO Y = y, X é Uniforme no intervalo (0,2y).

E qual a sua média condicional? Pelas propriedades da Uniforme, é y. Faça as contas para confirmar! Ou seja, E(X| Y = y) = y.
Analogamente, pelas propriedades da densidade Uniforme,
VAR(X | Y = y) = $(2y-0)^2/12 = 4y^2/12 = y^2/3$ (comprove!)

Problema 3

O número de clientes que abastecem num posto de gasolina num intervalo de meia hora é uma variável Poisson com média 12. A quantidade de dinheiro gasta por um cliente é uma variável Uniforme(40,140) e supomos que os clientes gastam dinheiro de maneira independente uns dos outros. Encontre a média, a variância e o desvio padrão da quantidade de dinheiro que o posto fatura num intervalo de meia hora.

Solução

Seja T = quantidade total de dinheiro faturada pelo posto em meia hora

$T = \sum_{i=1}^{N} X_i$ onde X_i é a quantidade de dinheiro gasta pelo i-ésimo cliente e N (uma variável aleatória Poisson) é o número de clientes que entram no posto naquela meia hora.

Vamos supor que os X_i 's são todos iid Uniforme(40,140).

Então, T é uma soma de um número aleatório de variáveis aleatórias. Já vimos que:

$$E(T) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i | N\right)\right] = E(N.E(X)) = E(N).E(X)$$

$$VAR(T) = VAR\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(VAR(T \mid N) + VAR(E(T \mid N)) =$$

$$= E(N.VAR(X)) + \{E(X)\}^2.VAR(N) =$$

$$= VAR(X).E(N) + \{E(X)\}^2.VAR(N)$$

Assim, já que os X_i 's são todos iid Uniforme(40,140), E(X) = 90 e VAR(X) = $(100)^2/12$.
Também, como N é Poisson(12), E(N) = VAR(N) = 12.

Logo:
E(T) = (12)(90) = R$ 1080 e
VAR(T) = $(100)^2.(12/12) + 12(90)^2 = (100)^2 + 12(90)^2 = 107200$
Logo, o desvio padrão de T é, aproximadamente, R$ 327,41

Problema 4

Dado P = p, Y é uma variável Binomial(n = 6, p). P é também uma variável aleatória, com função de probabilidade dada por:

p	f(p) = Pr(P = p)
0,2	0,15
0,4	0,25
0,6	0,35
0,8	0,25

a) Escreva a função de probabilidade marginal de Y.
b) Encontre a função de probabilidade condicional de P dado Y = 0.
c) Encontre a função de probabilidade condicional de P dado Y = 5.

Solução

Então, a função de probabilidade de P pode ser escrita como:

$$f_P(p) = 0.15.I_{\{p=0.2\}} + 0.25.I_{\{p=0.4\}} + 0.35.I_{\{p=0.6\}} + 0.25.I_{\{p=0.8\}}$$

Assim, a função de probabilidade conjunta de Y e P é dada por:

$$f(y,p) = \binom{6}{y} p^y (1-p)^{6-y} \left\{ 0.15.I_{\{p=0.2\}} + 0.25.I_{\{p=0.4\}} + 0.35.I_{\{p=0.6\}} + 0.25.I_{\{p=0.8\}} \right\} =$$

$$= \binom{6}{y} \left\{ 0.15(0.20)^y (0.8)^{6-y} I_{\{p=0.2\}} + 0.25(0.40)^y (0.6)^{6-y} I_{\{p=0.4\}} + 0.35(0.6)^y (0.4)^{6-y} I_{\{p=0.6\}} + 0.25(0.8)^y (0.2)^{6-y} I_{\{p=0.8\}} \right\}$$

$$\text{para } y = 0, 1, .., 6 \text{ e } p = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$$

A função de probabilidade marginal de Y é apenas o somatório desta conjunta para todo p, ou seja, para os quatro valores possíveis de P.

Então, por exemplo:

$$\Pr(Y=0)=0.15(0.8)^6+0.25(0.6)^6+0.35(0.4)^6+0.25(0.2)^6=0.0524$$

$$\Pr(Y=5)=6\left\{0.15(0.20)^5(0.8)+0.25(0.4)^5(0.6)+0.35(0.6)^5(0.4)+0.25(0.8)^5(0.2)\right\}=$$
$$=6\left\{0.12(0.20)^5+0.15(0.4)^5+0.14(0.6)^5+0.05(0.8)^5\right\}=0.1731$$

A função de probabilidade condicional de P dado Y = y é apenas a conjunta (que já conhecemos) sobre a marginal de Y (que acabamos de calcular).
Ou seja:

$$f(0.2\mid Y=y)=\frac{\binom{6}{y}\left\{0.15(0.2)^y(0.8)^{6-y}\right\}}{\Pr(\mathrm{Y=y})}$$

$$f(0.4\mid Y=y)=\frac{\binom{6}{y}\left\{0.25(0.4)^y(0.6)^{6-y}\right\}}{\Pr(\mathrm{Y=y})}$$

$$f(0.6\mid Y=y)=\frac{\binom{6}{y}\left\{0.35(0.6)^y(0.4)^{6-y}\right\}}{\Pr(\mathrm{Y=y})}$$

$$f(0.8\mid Y=y)=\frac{\binom{6}{y}\left\{0.25(0.8)^y(0.2)^{6-y}\right\}}{\Pr(\mathrm{Y=y})}$$

Dado Y = 0:

$$f(0.2\mid Y=0)=\frac{\left\{0.15(0.8)^6\right\}}{0.0524}=0.7499$$
$$f(0.4\mid Y=0)=\frac{\left\{0.25(0.6)^6\right\}}{0.0524}=0.0224$$
$$f(0.6\mid Y=0)=\frac{\left\{0.35(0.4)^6\right\}}{0.0524}=0.0273$$
$$f(0.8\mid Y=0)=\frac{\left\{0.25(0.2)^6\right\}}{0.0524}=0.0003$$

Dado Y = 5:

$$f(0.2\mid Y=5)=\frac{6\left\{0.15(0.2)^5(0.8)\right\}}{0.1731}$$
$$f(0.4\mid Y=5)=\frac{6\left\{0.25(0.4)^5(0.6)\right\}}{0.1731}$$
$$f(0.6\mid Y=5)=\frac{6\left\{0.35(0.6)^5(0.4)\right\}}{0.1731}$$
$$f(0.8\mid Y=5)=\frac{6\left\{0.25(0.8)^5(0.2)\right\}}{0.1731}$$

Problema 5

Sejam X_1 e X_2 independentes com densidades Gama(a_1, b) e Gama(a_2, b) respectivamente.
Ache a densidade de $Y = X_1/(X_1 + X_2)$.

Solução

Será necessário fazer uma transformação de duas em duas variáveis. Acredito que a transformação mais fácil seja de $Y_1 = X_1/(X_1 + X_2)$ e $Y_2 = X_1 + X_2$, pois a densidade conjunta que encontramos é interessante e as duas "novas" variáveis têm densidades conhecidas e são independentes.

A transformação inversa é dada por:

$X_1 = Y_1 . Y_2$

$X_2 = Y_2 - Y_1 . Y_2 = Y_2 . (1 - Y_1)$

O jacobiano da transformação é:

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ -y_2 & 1-y_1 \end{pmatrix} = y_2 - y_1.y_2 + y_1.y_2 = y_2$$

Como $Y_2 > 0$ pois é a soma de duas variáveis Gama, o módulo do Jacobiano é igual a y_2.

A densidade conjunta de X_1 e X_2 é:

$$f(x_1, x_2) = \frac{b^{a_1} x_1^{a_1-1} e^{-bx_1}}{\Gamma(a_1)} \frac{b^{a_2} x_2^{a_2-1} e^{-bx_2}}{\Gamma(a_2)} = \frac{b^{a_1+a_2} e^{-b(x_1+x_2)} x_1^{a_1-1} x_2^{a_2-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}$$

A densidade conjunta de Y_1 e Y_2 é:

$$g(y_1, y_2) = \frac{b^{a_1+a_2} e^{-b(y_2)} (y_1 y_2)^{a_1-1} (y_2(1-y_1))^{a_2-1} y_2}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} = \frac{b^{a_1+a_2} y_2^{a_1-1+a_2-1+1} e^{-b(y_2)} (y_1)^{a_1-1} (1-y_1)^{a_2-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} =$$

$$= \frac{b^{a_1+a_2} y_2^{a_1-1+a_2-1+1} e^{-b(y_2)}}{\Gamma(a_1+a_2)} . \Gamma(a_1+a_2) \frac{(y_1)^{a_1-1}(1-y_1)^{a_2-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}$$

Onde no último passo multiplicamos e dividimos pela função Gama de $a_1 + a_2$.

A densidade marginal de Y_1 é encontrada integrando-se a conjunta em Y_2. Pode-se ver imediatamente acima que Y_2 tem densidade Gama($a_1 + a_2$, b) e portanto a integral da conjunta nesta variável é 1. Logo:

$$g_1(y_1) = \frac{\Gamma(a_1+a_2)(y_1)^{a_1-1}(1-y_1)^{a_2-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}$$ para $0 < y_1 < 1$ e então Y_1 é Beta(a_1, a_2).

ENCE – Teoria da Probabilidade II - Profa. Mônica Barros
FORMULÁRIO

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância	fgm
Uniforme	$f(x)=\dfrac{1}{b-a}\quad \text{se } a\le x\le b$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	Não é útil
Exponencial	$f(x)=\lambda.\exp(-\lambda.x)\quad \text{onde } \lambda>0 \text{ e } x\ge 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)$ se $t<\lambda$
Gama	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha.x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.e^{-\beta x}, & \text{onde } x\ge 0\\ 0 & \text{se } x<0\end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ se $t<\beta$
Qui-Quadrado	$f(x)=\dfrac{1}{2^{n/2}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}$	n	2n	$\left(\dfrac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ se $t<1/2$
Binomial	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$ para $x=0,1,2,\ldots,n$	n.p	n.p.q	$(pe^t+q)^n$
Hipergeométrica	$f(x)=\Pr(X=x)=\dfrac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n.\left(\dfrac{r}{N}\right)$	$n.\left(\dfrac{r}{N}\right)\left(1-\dfrac{r}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$	Não é útil
Geométrica	$f(n)=\Pr(X=n)=(1-p)^{n-1}p$ onde n = 1, 2, 3, ...	1/p	q/p^2	$M(t)=\dfrac{pe^t}{1-qe^t}$
Poisson	$\Pr(X=x)=f(x)=\dfrac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!}$ onde x = 0, 1, 2, ...	λ	λ	$E(e^{tX})=e^{\lambda.(e^t-1)}$
Binomial Negativa	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{x-1}{r-1}.p^r.q^{x-r}$ onde x = r, r + 1, r + 2, ...	r/p	$r.q/p^2$	$M(t)=\left(\dfrac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

Resultados Matemáticos

Série Geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty}a^k=1+a+a^2+a^3+\ldots..=\frac{1}{1-a}\quad \text{desde que } |a|<1$$

Teorema Binomial

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\quad \text{onde a e b são número reais e k, n são inteiros} \ge 0$$

Série de Taylor da Exponencial

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots...$$

Função Gama

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t}dt$$

Propriedades da Função Gama

1) Γ(n) = (n-1).Γ(n-1) para n > 1
2) Γ(n) = (n-1)! se n é inteiro > 1
3) Γ(1) = 0! = 1
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

Integrais Relevantes

$$\int u.e^{au}du=\frac{e^{au}}{a}.\left(u-\frac{1}{a}\right)$$

$$\int u^2.e^{au}du=\frac{e^{au}}{a^3}.\left(a^2u^2-2.a.u+2\right)-\frac{2}{\mathrm{a}^3}$$

$$\int u^3.e^{au}du=\frac{e^{au}}{a^4}.\left(a^3u^3-3.a^2.u^2+6.a.u-6\right)+\frac{6}{\mathrm{a}^4}$$

Padronização de uma variável aleatória

Se X tem média a e variância b^2 então Z = (X-a)/b tem média 0 e variância 1. Se, além disso, X é Normal, Z também é Normal.

Densidade Lognormal

Se X é N(μ, σ^2) então Y = e^X é Lognormal. Pode-se provar que E(Y) = exp(μ + σ^2/2) e

$$VAR(Y)=\exp\left(2\mu+\sigma^2\right).\left(e^{\sigma^2}-1\right)$$

Densidade Beta

$$f(x)=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}x^{m-1}(1-x)^{n-1}\quad \text{onde } 0<\mathrm{x}<1 \text{ e m, n inteiros} \geq 1$$

Se X ~ Beta (m, n) então:

$$E(X)=\frac{m}{m+n}$$

$$VAR(X)=\frac{mn}{(m+n+1)\ (m+n)^2}$$

$$E(X^k)=\frac{\Gamma(k+m)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(k+m+n)}$$

Densidade Lognormal

Se X é N(μ, σ^2) então Y = e^X é Lognormal. Pode-se provar que E(Y) = exp(μ + σ^2/2) e

$$VAR(Y)=\exp\left(2\mu+\sigma^2\right).\left(e^{\sigma^2}-1\right)$$

Teorema – Aditividade da Qui-quadrado

Sejam X_1, X_2, ..., X_n variáveis aleatórias **independentes** e X_i é Qui-Quadrado com k_i graus de liberdade. Então Y = X_1 + X_2 + ... + X_n é também Qui-Quadrado, com k_1 + k_2 + ...+ k_n graus de liberdade.

Teorema – Relação entre Normal e Qui-Quadrado

Seja Z ~ N(0,1) . Então V = Z^2 tem densidade Qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

Fórmulas de "Adão e Eva"

$$E_X(X)=E_Y\{E_{X|Y}(X|Y)\} \qquad (1)$$

e

$$VAR_X(X)=E_Y\{VAR_{X|Y}(X|Y)\}+VAR_Y\{E_{X|Y}(X|Y)\} \qquad (2)$$