

**ENCE – TEORIA DE PROBABILIDADE II – SEMESTRE 2009.01 – Profa. Mônica Barros**  
**Teste 2 – 29/06/2009**  
**GABARITO**

**Problema 1**

Sejam  $X_1, \dots, X_{10}$  iid com a seguinte densidade:  $f(x) = kx^2$  se  $0 < x < 1$ .

- Ache  $k$
- Calcule a probabilidade de  $X_{(2)}$  ser maior que 0.2

**Solução**

$$a) \int_0^1 kx^2 dx = 1 \Rightarrow k \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{k}{3} = 1 \Rightarrow k = 3$$

b) A função de distribuição é:  $F(x) = 0$  se  $x < 0$ ,  $F(x) = 1$  se  $x > 1$  e:

$$F(x) = \int_0^x 3u^2 du = x^3 \quad \text{se } 0 < x < 1$$

A densidade de  $X_{(2)}$  é:

$$f_2(x) = \frac{10!}{(2-1)!(10-2)!} 3x^2 \cdot \{x^3\}^{2-1} \{1-x^3\}^{10-2} = \frac{10!}{8!} (3)x^2 (x^3)(1-x^3)^8 \quad 0 < x < 1$$

Faça a mudança de variáveis  $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$

$$\Pr\{X > 0.2\} = \Pr\{X^3 > 8/1000\} = \Pr\{T > 8/1000\} = \int_{8/1000}^1 \frac{10!}{8!} t(1-t)^8 dt$$

Faça a mudança de variáveis  $u = 1 - t \Rightarrow du = -dt \Rightarrow t = 8/1000 \Rightarrow u = 992/1000$ ,  $t = 1 \Rightarrow u = 0$

$$\begin{aligned} \Pr\{X > 0.2\} &= \Pr\{T > 8/1000\} = \Pr\{U < 992/1000\} = \int_0^{992/1000} \frac{10!}{8!} (1-u)u^8 du = 90 \int_0^{992/1000} (u^8 - u^9) du = \\ &= 90 \left[ \frac{u^9}{9} - \frac{u^{10}}{10} \right] \Big|_0^{992/1000} = (10u^9 - 9u^{10}) \Big|_0^{992/1000} = 0.9972 \end{aligned}$$

**Problema 2**

Considere uma amostra de tamanho  $n$  da densidade Exponencial com média 2.

- Escreva a densidade do mínimo.
- Escreva a densidade do máximo.
- Escreva a densidade da amplitude.
- Qual a probabilidade do máximo exceder 2 quando a amostra tem tamanho 5? E quando tem tamanho 10?

**Solução**

Nota: se  $X$  é  $\text{Expo}(\lambda)$  então sua função de distribuição é  $F(x) = 1 - \exp(-\lambda \cdot x)$

A densidade da  $k$ -ésima estatística de ordem é:

$$f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x) \cdot F^{k-1}(x) \{1 - F(x)\}^{n-k}$$

Logo:

a) A densidade do mínimo é:

$$f_1(x) = \frac{n!}{(n-1)!} f(x) \cdot \{1 - F(x)\}^{n-1} = n \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \{1 - 1 + e^{-\lambda \cdot x}\}^{n-1} = n \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \{e^{-\lambda \cdot x}\}^{n-1} = n \cdot \lambda \cdot e^{-n \lambda \cdot x}$$

Ou seja, no caso geral,  $X_{(1)}$  é  $\text{Expo}(n \cdot \lambda)$

Aqui,  $\lambda = 1/2$  e portanto o mínimo é  $\text{Expo}(n/2)$

b) A densidade do máximo é:

$$f_n(x) = \frac{n!}{(n-1)!} f(x) \cdot F^{n-1}(x) = n \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \{1 - e^{-\lambda \cdot x}\}^{n-1} \quad \text{que não é uma densidade conhecida. Neste caso basta}$$

fazer,  $\lambda = 1/2$ .

c) A densidade da amplitude (R) é:

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < 0 \\ n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(r+x) \{F(r+x) - F(x)\}^{n-2} dx & \text{se } r > 0 \end{cases}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} f_R(r) &= n(n-1) \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (x+r)} \{1 - e^{-\lambda \cdot (x+r)} - 1 + e^{-\lambda \cdot x}\}^{n-2} dx = \\ &= n(n-1) e^{-\lambda \cdot r} \int_0^{\infty} \lambda^2 \cdot e^{-2\lambda \cdot x} \{e^{-\lambda \cdot x} - e^{-\lambda \cdot r} e^{-\lambda \cdot x}\} dx = \\ &= n(n-1) e^{-\lambda \cdot r} \left\{ \int_0^{\infty} \lambda^2 \cdot e^{-3\lambda x} dx - e^{-\lambda \cdot r} \int_0^{\infty} \lambda^2 \cdot e^{-3\lambda x} dx \right\} = \\ &= n(n-1) e^{-\lambda \cdot r} \left\{ \frac{\lambda^2}{3\lambda} - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda \cdot r}}{3\lambda} \right\} = n(n-1) e^{-\lambda \cdot r} \left\{ \frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda e^{-\lambda \cdot r}}{3} \right\} = \\ &= \frac{n(n-1) \lambda e^{-\lambda \cdot r} \{1 - e^{-\lambda \cdot r}\}}{3} \quad \text{para } r > 0 \end{aligned}$$

Neste caso específico basta substituir  $\lambda = 1/2$ .

d) Qual a probabilidade do máximo exceder 2 quando a amostra tem tamanho 5? E quando tem tamanho 10?

A densidade do máximo para uma amostra de tamanho 5 e  $\lambda = 1/2$  é:

$$f_5(x) = 5 \left( \frac{1}{2} \right) e^{-x/2} \{1 - e^{-x/2}\}^4$$

A probabilidade desejada é:

$$\Pr(X_{(5)} > 2) = \int_2^{\infty} \frac{5}{2} e^{-x/2} \{1 - e^{-x/2}\}^4 dx$$

Faça a mudança de variáveis:  $t = 1 - \exp(-x/2)$ .  $dt = +(1/2)\exp(-x/2)dx$

Se  $x \rightarrow 2$ ,  $t \rightarrow 1 - \exp(-1) \approx 0.6321$ , e se  $x \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow 1$

Logo:

$$\Pr(X_{(5)} > 2) = \int_{1-\exp(-1)}^1 5t^4 dt = t^5 \Big|_{1-\exp(-1)}^1 = 1 - (1 - e^{-1})^5 \approx 1 - 0.1009 \approx 0.8991$$

De maneira análoga, se agora a amostra tem tamanho 10, a densidade do máximo torna-se:

$$f_{10}(x) = 10 \left( \frac{1}{2} \right) e^{-x/2} \{1 - e^{-x/2}\}^9$$

A probabilidade desejada é:

$$\Pr(X_{(10)} > 2) = \int_2^{\infty} \frac{10}{2} e^{-x/2} \{1 - e^{-x/2}\}^9 dx$$

Fazendo a mesma mudança de variáveis que no item anterior:

$$\Pr(X_{(10)} > 2) = \int_{1-\exp(-1)}^1 10t^9 dt = t^{10} \Big|_{1-\exp(-1)}^1 = 1 - (1 - e^{-1})^{10} \approx 1 - 0.0102 \approx 0.9898$$

### Problema 3

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com função de probabilidade:

$$f(x) = q \cdot p^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e } q = 1 - p \quad \text{onde } 0 < p < 1$$

Calcule a função geradora de probabilidades de  $X$ .

A partir da função geradora de probabilidades, encontre a média e a variância de  $X$ .

### Solução

A função geradora de probabilidades de  $X$  é:

$$G(s) = \sum_{x=1}^{\infty} s^x \cdot \Pr(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} s^x \cdot q \cdot p^{x-1} = q \cdot p^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} (sp)^x = \frac{q}{p} \left[ \frac{sp}{1-sp} \right] = \frac{q \cdot s}{1 - p \cdot s} \quad \text{desde que } |sp| < 1$$

$$\frac{dG}{ds} = \frac{q(1-ps) - (-p)(qs)}{(1-ps)^2} = \frac{q - pqs + pqs}{(1-ps)^2} = \frac{q}{(1-ps)^2}$$

$$E(X) = \left. \frac{dG}{ds} \right|_{s=1} = \frac{q}{(1-p)^2} = \frac{q}{q^2} = \frac{1}{q}$$

$$\frac{d^2G}{ds^2} = q(-2)(-p)(1-ps)^{-3} = +2pq(1-ps)^{-3} = \frac{2pq}{(1-ps)^3}$$

$$E\{X(X-1)\} = E\{X^2 - X\} = E(X^2) - E(X) = \left. \frac{d^2G}{ds^2} \right|_{s=1} = \frac{2pq}{(1-p)^3} = \frac{2pq}{q^3} = \frac{2p}{q^2}$$

Assim:

$$E(X^2) = \frac{2p}{q^2} + E(X) = \frac{2p}{q^2} + \frac{1}{q} = \frac{2p+q}{q^2} = \frac{p+p+q}{q^2} = \frac{p+1}{q^2}$$

$$VAR(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = E(X^2) - \frac{1}{q^2} = \frac{p+1-1}{q^2} = \frac{p}{q^2}$$

#### Problema 4

Você joga R\$ 5 em cada repetição independente de um jogo no qual a probabilidade de ganhar é 50%. Use o Teorema Central do Limite para aproximar a probabilidade de que, após 100 jogadas, você:

- 1) Tenha perdido R\$ 80 ou mais.
- 2) Seu "ganho" esteja entre - R\$ 50 e + R\$ 50

**Não é necessário usar correção de continuidade.**

#### Solução

Seja  $X_i = +5$  se você ganha a  $i$ -ésima jogada e  $X_i = -5$  se você perde a  $i$ -ésima jogada. As probabilidades de ganhar e perder são iguais,  $p = q = 1/2$ . Então  $E(X_i) = 0$  e  $E(X_i^2) = 25(1/2) + (25)(1/2) = 25 = VAR(X_i)$ .

Seja  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$  o total de dinheiro ganho após as 100 jogadas

Então  $E(Y) = 0$  e  $VAR(Y) = 100(25)$

Pelo TCL:

$$Z = \frac{Y - 0}{\sqrt{(100)(25)}} = \frac{Y}{50} \text{ é aproximadamente } N(0,1)$$

$$\Pr\{-50 < Y < +50\} = \Pr\left\{-\frac{50}{50} < \frac{Y-0}{50} < +\frac{50}{50}\right\} \approx \Phi(+1) - \Phi(-1) = 2\Phi(+1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6827$$

#### Problema 5

Os preços de apartamentos de dois quartos em duas cidades  $X$  e  $Y$  são variáveis Normais correlacionadas. Na cidade  $X$ , o preço médio é R\$ 140 mil, e o desvio padrão dos preços é R\$ 15 mil. Na cidade  $Y$ , o preço médio é R\$ 180 mil, e o desvio padrão dos preços é R\$ 25 mil. A correlação entre os preços é  $\rho = +0.8$ . Calcule as seguintes probabilidades:

- a) De alguém pagar entre R\$ 121250 e R\$ 158750 por um apartamento na cidade  $X$ .
- b) De alguém pagar entre R\$ 121250 e R\$ 158750 por um apartamento na cidade  $X$  sabendo que um apartamento "equivalente" na cidade  $Y$  custa R\$ 200 mil.
- c) De alguém pagar entre R\$ 121250 e R\$ 158750 por um apartamento na cidade  $X$  sabendo que um apartamento "equivalente" na cidade  $Y$  custa R\$ 217500.
- d) Qual é a distribuição condicional dos preços de apartamento na cidade  $Y$  sabendo que o preço de um apartamento equivalente na cidade  $X$  é R\$ 160 mil?
- e) Qual é a distribuição condicional dos preços de apartamento na cidade  $Y$  sabendo que o preço de um apartamento equivalente na cidade  $X$  é R\$ 120 mil?

#### Solução

$$\begin{aligned} \text{a) } \Pr(121250 < X < 158750) &= \Pr\left(\frac{121250 - 140000}{15000} < \frac{X - 140000}{15000} < \frac{158750 - 140000}{15000}\right) = \\ &= \Pr(-1.25 < Z < 1.25) = 2\Phi(1.25) - 1 = 2(0.8944) - 1 = 0.7887 \end{aligned}$$

b) A distribuição condicional é Normal com média:

$$140000 + \frac{0.8(15000)}{(25000)}(200000 - 180000) = 140000 + 0.48(20000) = 149600$$

e variância:

$$(15000)^2 \cdot (1 - (0.8)^2) = (15000)^2 (0.36) = (0.60)^2 (15000)^2$$

Ou seja, o desvio padrão condicional é  $0.60(15000) = \text{R\$ } 9000$ .

$$\begin{aligned} \Pr(121250 < X < 158750) &= \Pr\left(\frac{121250 - 149600}{9000} < \frac{X - 149600}{9000} < \frac{158750 - 149600}{9000}\right) = \\ &= \Pr(-3.15 < Z < 1.0167) = \Phi(1.0167) - \Phi(-3.15) = 0.8454 - 0.0008 = 0.8445 \end{aligned}$$

c) A distribuição condicional é Normal com média:

$$140000 + \frac{0.8(15000)}{(25000)}(217500 - 180000) = 140000 + 18000 = 158000 \text{ e a mesma variância que no item b).}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \Pr(121250 < X < 158750) &= \Pr\left(\frac{121250 - 158000}{9000} < \frac{X - 158000}{9000} < \frac{158750 - 158000}{9000}\right) = \\ &= \Pr(-4.0833 < Z < 0.0833) = \Phi(0.0833) - \Phi(-4.0833) = 0.5332 - 0.0000 = 0.5332 \end{aligned}$$

d) A distribuição condicional de Y dado que X = 160 mil é Normal com média:

$$180000 + \frac{0.8(25000)}{(15000)}(16000 - 140000) = 180000 + 26667 = 206667$$

E variância:

$$(25000)^2 (1 - (0.8)^2) = (15000)^2$$

e) A distribuição condicional de Y dado que X = 120 mil é Normal com média:

$$180000 + \frac{0.8(25000)}{(15000)}(12000 - 140000) = 180000 - 26667 = 153333$$

e a mesma variância que no item anterior.

**ENCE – Teoria da Probabilidade II - Profa. Mônica Barros**  
**FORMULÁRIO**

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância	fgm
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ se $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Não é útil
Exponencial	$f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x)$ onde $\lambda > 0$ e $x \geq 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)$ se $t < \lambda$
Gama	$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta x}, & \text{onde } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ se $t < \beta$
Qui-Quadrado	$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$	n	2n	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ se $t < 1/2$
Binomial	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$ para $x = 0, 1, 2, \dots, n$	n.p	n.p.q	$(pe^t + q)^n$
Hipergeométrica	$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n \cdot \left(\frac{r}{N}\right)$	$n \cdot \left(\frac{r}{N}\right) \left(1 - \frac{r}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	Não é útil
Geométrica	$f(n) = \Pr(X = n) = (1-p)^{n-1} p$ onde $n = 1, 2, 3, \dots$	$1/p$	$q/p^2$	$M(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$
Poisson	$\Pr(X = x) = f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$ onde $x = 0, 1, 2, \dots$	$\lambda$	$\lambda$	$E(e^{tX}) = e^{\lambda(e^t - 1)}$
Binomial Negativa	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{x-r}$ onde $x = r, r+1, r+2, \dots$	$r/p$	$r \cdot q/p^2$	$M(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

**Resultados Matemáticos**

Série Geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{1}{1-a} \text{ desde que } |a| < 1$$

Teorema Binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são número reais e } k, n \text{ são inteiros } \geq 0$$

Série de Taylor da Exponencial

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

**Função Gama**

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} dt$$

**Propriedades da Função Gama**

- 1)  $\Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1)$  para  $n > 1$
- 2)  $\Gamma(n) = (n-1)!$  se  $n$  é inteiro  $> 1$
- 3)  $\Gamma(1) = 0! = 1$
- 4)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

**Integrais Relevantes**

$$\int u \cdot e^{au} du = \frac{e^{au}}{a} \cdot \left(u - \frac{1}{a}\right)$$

$$\int u^2 \cdot e^{au} du = \frac{e^{au}}{a^3} \cdot (a^2 u^2 - 2 \cdot a \cdot u + 2) - \frac{2}{a^3}$$

$$\int u^3 \cdot e^{au} du = \frac{e^{au}}{a^4} \cdot (a^3 u^3 - 3 \cdot a^2 \cdot u^2 + 6 \cdot a \cdot u - 6) + \frac{6}{a^4}$$

**Padronização de uma variável aleatória**

Se  $X$  tem média  $a$  e variância  $b^2$  então  $Z = (X-a)/b$  tem média 0 e variância 1. Se, além disso,  $X$  é Normal,  $Z$  também é Normal.

**Densidade Lognormal**

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma^2)$  então  $Y = e^X$  é Lognormal. Pode-se provar que  $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$  e  $VAR(Y) = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$

**Densidade Beta**

$$f(x) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m-1} (1-x)^{n-1} \quad \text{onde } 0 < x < 1 \text{ e } m, n \text{ inteiros } \geq 1$$

**Se  $X \sim$  Beta ( $m, n$ ) então:**

$$E(X) = \frac{m}{m+n}$$

$$VAR(X) = \frac{mn}{(m+n+1)(m+n)^2}$$

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(k+m)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(k+m+n)}$$

**Densidade Lognormal**

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma^2)$  então  $Y = e^X$  é Lognormal. Pode-se provar que  $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$  e  $VAR(Y) = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$

**Teorema – Aditividade da Qui-quadrado**

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias **independentes** e  $X_i$  é Qui-Quadrado com  $k_i$  graus de liberdade. Então  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  é também Qui-Quadrado, com  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  graus de liberdade.

**Teorema – Relação entre Normal e Qui-Quadrado**

Seja  $Z \sim N(0,1)$ . Então  $V = Z^2$  tem densidade Qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

**Fórmulas de “Adão e Eva”**

$$E_X(X) = E_Y\{E_{X|Y}(X|Y)\} \quad (1)$$

e

$$VAR_X(X) = E_Y\{VAR_{X|Y}(X|Y)\} + VAR_Y\{E_{X|Y}(X|Y)\} \quad (2)$$

**Teorema - A densidade de  $X(k)$  a  $k$ -ésima estatística de ordem, é:**

$$f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x) \cdot F^{k-1}(x) [1-F(x)]^{n-k}$$

**Teorema – Estatísticas de Ordem de amostra Unif(0,1)**

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes com densidade Unif(0,1).

Seja  $X(k)$  a  $k$ -ésima estatística de ordem da amostra.

Então  $X(k)$  tem densidade Beta com parâmetros  $k$  e  $n - k + 1$ .

**Densidade da Amplitude**

Seja  $R = X(n) - X(1)$  a amplitude de uma amostra de tamanho  $n$ . Sua densidade é:

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < 0 \\ n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(r+x)\{F(r+x)-F(x)\}^{n-2} dx & \text{se } r > 0 \end{cases}$$

**Se a amostra é Unif(0,1), este resultado se reduz a:**

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < 0 \\ n(n-1) \int_0^{1-r} (1)(1)\{(r+x)-(x)\}^{n-2} dx = n(n-1)r^{n-2}(1-r) & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

$$f_R(r) = n(n-1)r^{n-2}(1-r) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-1)\Gamma(2)} r^{n-1-1}(1-r)^{2-1} \quad \text{se } 0 < r < 1$$

**Normal Bivariada**

**A densidade de  $X_1$  e  $X_2$  é:**

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_1\sigma_2} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}R\right\}$$

Onde:

$$R = \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho \cdot \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

A densidade marginal de  $X_1$  é  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$

A densidade marginal de  $X_2$  é  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

As densidades condicionais também são Normais.

A densidade condicional de  $X_1$  dado  $X_2 = x_2$  é:

$$(X_1 | X_2 = x_2) \sim N\left(\mu_1 + \rho \cdot \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \cdot (x_2 - \mu_2), \sigma_1^2 \cdot (1 - \rho^2)\right)$$

A densidade condicional de  $X_2$  dado  $X_1 = x_1$  é:

$$(X_2 | X_1 = x_1) \sim N\left(\mu_2 + \rho \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \cdot (x_1 - \mu_1), \sigma_2^2 \cdot (1 - \rho^2)\right)$$

**Definição – Função Geradora de Momentos**

$$M(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} e^{tx} \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} e^{tx} \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

**Relação entre a fgm e o  $k$ -ésimo momento**

$$M^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k M(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = E(X^k)$$

**Fgm da soma de v.a. independentes**

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a. independentes mas não necessariamente identicamente distribuídas. Seja:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

A fgm de Y é:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(X_1 + \dots + X_n)}) = E(e^{tX_1} \dots e^{tX_n}) =$$

e como consequência da independência

$$= E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n}) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

#### Definição – Função Geradora de Probabilidades

Seja X uma variável discreta com valores inteiros. A função geradora de probabilidades de X é definida como:

$$G(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \cdot \Pr(X = x)$$

#### Propriedades da Função Geradora de Probabilidades

$$1) \Pr(X = k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k G(s)}{ds^k} \right|_{s=0}$$

$$2) E(X) = \left. \frac{dG}{ds} \right|_{s=1}$$

$$3) E(X(X-1)) = \left. \frac{d^2 G}{ds^2} \right|_{s=1}$$

#### Desigualdade de Markov

Seja  $u(X)$  uma função não negativa da variável aleatória X.

Se  $E[u(X)]$  existe, então para qualquer constante positiva  $c$  temos:

$$\Pr(u(X) \geq c) \leq \frac{E(u(X))}{c}$$

#### Desigualdade de Chebyshev

$$\Pr((X - \mu)^2 \geq k^2) = \Pr(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2} \quad \text{ou analogamente} \quad \Pr(|X - \mu| \leq k) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

#### Desigualdade de Jensen

$$E\{f(X)\} \geq f\{E(X)\}$$

alternativamente

$$f\{E(X)\} \leq E\{f(X)\} \quad \text{se } f \text{ é uma função convexa}$$

#### Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  iid com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , ambas finitas.

Então, para qualquer  $n \geq 1$ :

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Converge em probabilidade para  $\mu = E(X_i)$  quando  $n$  tende a infinito.

O que significa que:

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{VAR}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

#### O Teorema Central do Limite (TCL)

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes tais que  $E(X_i) = \mu_i$  e  $\text{VAR}(X_i) = \sigma_i^2$ , ambas finitas. Seja  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Então, sob condições bastante gerais podemos afirmar que:

$$Z = \frac{Y - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}$$

Tem aproximadamente uma distribuição  $N(0,1)$ .  
Esta aproximação torna-se cada vez melhor à medida que  $n$  cresce.

### Teorema Central do Limite (versão iid)

- Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) tais que  $E(X_i) = \mu$  e  $\text{VAR}(X_i) = \sigma^2$ , ambas finitas.
- Seja  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Então, sob condições bastante gerais:
  - $Z = \frac{Y - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$  Tem aproximadamente uma distribuição  $N(0,1)$ .
  - Esta aproximação torna-se cada vez melhor à medida que  $n$  cresce.

### Teorema de DeMoivre e Laplace

Este teorema é apenas um caso particular do teorema central do limite, pois uma variável aleatória com distribuição Binomial pode ser encarada como a soma de  $n$  variáveis Bernoulli( $p$ ) independentes.

Seja  $Y \sim \text{Bin}(n, p)$  onde  $n$  é "grande" e  $p$  não está próximo de zero. Então:

$$Z = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{\text{VAR}(Y)}} = \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

tem aproximadamente uma distribuição  $N(0,1)$ .

$$\Pr(Y \leq y) = \Pr\left(\frac{Y - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{y - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{y - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{y - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

### Correção de Continuidade

Quantidade desejada na distribuição Binomial	Quantidade Calculada através da correção de continuidade	Expressão aproximada usando a densidade Normal
$\Pr(Y = y)$	$\Pr(y - 0.5 \leq Y \leq y + 0.5)$	$\Phi\left(\frac{y + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{y - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
$\Pr(Y \leq y)$	$\Pr(Y \leq y + 0.5)$	$\Phi\left(\frac{y + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
$\Pr(Y < y) = \Pr(Y \leq y - 1)$	$\Pr(Y \leq y - 1 + 0.5)$	$\Phi\left(\frac{y - 1 + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{y - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
$\Pr(Y \geq y)$	$\Pr(Y \geq y - 0.5)$	$1 - \Phi\left(\frac{y - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
$\Pr(Y > y) = \Pr(Y \geq y + 1)$	$\Pr(Y \geq y + 1 - 0.5)$	$1 - \Phi\left(\frac{y + 1 - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
$\Pr(a \leq Y \leq b)$	$\Pr(a - 0.5 \leq Y \leq b + 0.5)$	$\Phi\left(\frac{b + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	$\Phi(z)$		z	$\Phi(z)$		z	$\Phi(z)$
0,0000	50,00%		0,9800	83,65%		2,0000	97,72%
0,0200	50,80%		0,9900	83,89%		2,0100	97,78%
0,0300	51,20%		1,0000	84,13%		2,0125	97,79%
0,0400	51,60%		1,0100	84,38%		2,0200	97,83%
0,0500	51,99%		1,0167	84,54%		2,0300	97,88%
0,1000	53,98%		1,0250	84,73%		2,0400	97,93%
0,1500	55,96%		1,0500	85,31%		2,0412	97,94%
0,2000	57,93%		1,0553	85,44%		2,0500	97,98%
0,2236	58,85%		1,1000	86,43%		2,1000	98,21%
0,2500	59,87%		1,1180	86,82%		2,2000	98,61%
0,3000	61,79%		1,1475	87,44%		2,2361	98,73%
0,3015	61,85%		1,1500	87,49%		2,3000	98,93%
0,3333	63,06%		1,1553	87,60%		2,3263	99,00%
0,3475	63,59%		1,1667	87,83%		2,3333	99,02%
0,3492	63,65%		1,2000	88,49%		2,4000	99,18%
0,3500	63,68%		1,2060	88,61%		2,5000	99,38%
0,4000	65,54%		1,2200	88,88%		2,5500	99,46%
0,4167	66,16%		1,2500	89,44%		2,5628	99,48%
0,4307	66,67%		1,2700	89,79%		2,6000	99,53%
0,4500	67,36%		1,2816	90,00%		2,6500	99,60%
0,5000	69,15%		1,3000	90,32%		2,6667	99,62%
0,5500	70,88%		1,3333	90,88%		2,6833	99,64%
0,5774	71,81%		1,3750	91,54%		2,7000	99,65%
0,6000	72,57%		1,4000	91,92%		2,7500	99,70%
0,6250	73,40%		1,4468	92,60%		2,8000	99,74%
0,6500	74,22%		1,4500	92,65%		2,9000	99,81%
0,6667	74,75%		1,5000	93,32%		2,9500	99,84%
0,6708	74,88%		1,5500	93,94%		3,0000	99,87%
0,7000	75,80%		1,5811	94,31%		3,1000	99,90%
0,7500	77,34%		1,6000	94,52%		3,1500	99,92%
0,8000	78,81%		1,6450	95,00%		3,1667	99,92%
0,8333	79,77%		1,6667	95,22%		3,2000	99,93%
0,8500	80,23%		1,7000	95,54%		3,8333	99,99%
0,8666	80,69%		1,8000	96,41%		4,0833	100,00%
0,8944	81,45%		1,8333	96,66%			
0,9000	81,59%		1,8500	96,78%			
0,9167	82,03%		1,9000	97,13%			
0,9500	82,89%		1,9500	97,44%			
0,9600	83,15%		1,9600	97,50%			
0,9700	83,40%		1,9800	97,61%			
0,9722	83,45%		1,9900	97,67%			
0,9750	83,52%		1,9950	97,70%			