

ENCE – TEORIA DE PROBABILIDADE II – SEMESTRE 2009.01 – Profa. Mônica Barros

Teste 3 – 16/07/2009

NOME:

Problema 1

Sejam X_1, \dots, X_{20} iid com a seguinte densidade: $f(x) = kx$ se $0 < x < 1$.

- a) Ache k
- b) Calcule a probabilidade de $X_{(20)}$ ser maior que 0.9

Problema 2

Seja X uma v.a. contínua com densidade:

$$f(x) = \frac{5}{x^6} \quad \text{para } x > 1$$

Calcule $E(X)$ e $E(X \mid X > 3)$.

Problema 3

Seja X uma variável aleatória Binomial(n,p)

- 1) Calcule a função geradora de probabilidades de X .
- 2) A partir da função geradora de probabilidades, mostre que a média é $n.p$ e a variância de X é $n.p.q$ onde $q = 1 - p$.

Dica: Teorema Binomial

Dica 2: cuidado com os limites do somatório que definem a função geradora de probabilidades – eles devem corresponder aos valores possíveis de X

Problema 4

O peso de um pacotes de café de 500g é uma variável aleatória Uniforme no intervalo $(500 - 4\sqrt{3}, 500 + 4\sqrt{3})$.

O produtor de café embala seus produtos em caixas contendo 36 pacotes. Calcule a probabilidade do peso total de uma caixa (considerando apenas o peso dos pacotes) estar entre 17988g e 18048g.

Problema 5

A densidade conjunta de X e Y é:

$$f(x, y) = kx.e^{-\frac{xy}{2}} \text{ se } 0 < x < 4 \text{ e } y > 0$$

- a) Ache k que faz desta expressão uma densidade.
- b) Ache a densidade marginal de X. (Dica – é uma densidade conhecida)
- c) Ache a densidade condicional de Y dado $X = x$. (Dica – é uma densidade conhecida)
- d) Ache a média condicional de Y dado $X = x$. (Dica – se você reconheceu qual é a densidade do item c, não precisa fazer as contas, apenas citar os resultados conhecidos)
- e) Ache a variância condicional de Y dado $X = x$. (Dica – se você reconheceu qual é a densidade do item c, não precisa fazer as contas, apenas citar os resultados conhecidos)

ENCE – Teoria da Probabilidade II - Profa. Mônica Barros
FORMULÁRIO

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância	fgm
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ se $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Não é útil
Exponencial	$f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x)$ onde $\lambda > 0$ e $x \geq 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)$ se $t < \lambda$
Gama	$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta x}, & \text{onde } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ se $t < \beta$
Qui-Quadrado	$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$	n	2n	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ se $t < 1/2$
Binomial	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$ para $x = 0, 1, 2, \dots, n$	n.p	n.p.q	$(pe^t + q)^n$
Hipergeométrica	$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n \cdot \left(\frac{r}{N}\right)$	$n \cdot \left(\frac{r}{N}\right) \left(1 - \frac{r}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	Não é útil
Geométrica	$f(n) = \Pr(X = n) = (1-p)^{n-1} p$ onde $n = 1, 2, 3, \dots$	$1/p$	q/p^2	$M(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$
Poisson	$\Pr(X = x) = f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$ onde $x = 0, 1, 2, \dots$	λ	λ	$E(e^{tX}) = e^{\lambda(e^t - 1)}$
Binomial Negativa	$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{x-r}$ onde $x = r, r+1, r+2, \dots$	r/p	$r \cdot q/p^2$	$M(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

Resultados Matemáticos

Série Geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{1}{1-a} \text{ desde que } |a| < 1$$

Teorema Binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são número reais e } k, n \text{ são inteiros } \geq 0$$

Série de Taylor da Exponencial

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

Função Gama

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} dt$$

Propriedades da Função Gama

- 1) $\Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1)$ para $n > 1$
- 2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ se n é inteiro > 1
- 3) $\Gamma(1) = 0! = 1$
- 4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Integrais Relevantes

$$\int u \cdot e^{au} du = \frac{e^{au}}{a} \cdot \left(u - \frac{1}{a}\right)$$

$$\int u^2 \cdot e^{au} du = \frac{e^{au}}{a^3} \cdot (a^2 u^2 - 2 \cdot a \cdot u + 2) - \frac{2}{a^3}$$

$$\int u^3 \cdot e^{au} du = \frac{e^{au}}{a^4} \cdot (a^3 u^3 - 3 \cdot a^2 \cdot u^2 + 6 \cdot a \cdot u - 6) + \frac{6}{a^4}$$

Padronização de uma variável aleatória

Se X tem média a e variância b^2 então $Z = (X-a)/b$ tem média 0 e variância 1. Se, além disso, X é Normal, Z também é Normal.

Densidade Lognormal

Se X é $N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = e^X$ é Lognormal. Pode-se provar que $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ e $VAR(Y) = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$

Densidade Beta

$$f(x) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m-1} (1-x)^{n-1} \quad \text{onde } 0 < x < 1 \text{ e } m, n \text{ inteiros } \geq 1$$

Se $X \sim$ Beta (m, n) então:

$$E(X) = \frac{m}{m+n}$$

$$VAR(X) = \frac{mn}{(m+n+1)(m+n)^2}$$

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(k+m)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(k+m+n)}$$

Densidade Lognormal

Se X é $N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = e^X$ é Lognormal. Pode-se provar que $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ e $VAR(Y) = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$

Teorema – Aditividade da Qui-quadrado

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias **independentes** e X_i é Qui-Quadrado com k_i graus de liberdade. Então $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ é também Qui-Quadrado, com $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ graus de liberdade.

Teorema – Relação entre Normal e Qui-Quadrado

Seja $Z \sim N(0,1)$. Então $V = Z^2$ tem densidade Qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

Fórmulas de “Adão e Eva”

$$E_X(X) = E_Y\{E_{X|Y}(X|Y)\} \quad (1)$$

e

$$VAR_X(X) = E_Y\{VAR_{X|Y}(X|Y)\} + VAR_Y\{E_{X|Y}(X|Y)\} \quad (2)$$

Teorema - A densidade de $X(k)$ a k -ésima estatística de ordem, é:

$$f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x) \cdot F^{k-1}(x) [1-F(x)]^{n-k}$$

Teorema – Estatísticas de Ordem de amostra Unif(0,1)

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com densidade Unif(0,1).

Seja $X(k)$ a k -ésima estatística de ordem da amostra.

Então $X(k)$ tem densidade Beta com parâmetros k e $n - k + 1$.

Densidade da Amplitude

Seja $R = X(n) - X(1)$ a amplitude de uma amostra de tamanho n . Sua densidade é:

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < 0 \\ n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(r+x)\{F(r+x)-F(x)\}^{n-2} dx & \text{se } r > 0 \end{cases}$$

Se a amostra é Unif(0,1), este resultado se reduz a:

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < 0 \\ n(n-1) \int_0^{1-r} (1)(1)\{(r+x)-(x)\}^{n-2} dx = n(n-1)r^{n-2}(1-r) & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

$$f_R(r) = n(n-1)r^{n-2}(1-r) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-1)\Gamma(2)} r^{n-1-1}(1-r)^{2-1} \quad \text{se } 0 < r < 1$$

Normal Bivariada

A densidade de X_1 e X_2 é:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_1\sigma_2} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}R\right\}$$

Onde:

$$R = \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho \cdot \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

A densidade marginal de X_1 é $N(\mu_1, \sigma_1^2)$

A densidade marginal de X_2 é $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

As densidades condicionais também são Normais.

A densidade condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ é:

$$(X_1 | X_2 = x_2) \sim N\left(\mu_1 + \rho \cdot \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \cdot (x_2 - \mu_2), \sigma_1^2 \cdot (1 - \rho^2)\right)$$

A densidade condicional de X_2 dado $X_1 = x_1$ é:

$$(X_2 | X_1 = x_1) \sim N\left(\mu_2 + \rho \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \cdot (x_1 - \mu_1), \sigma_2^2 \cdot (1 - \rho^2)\right)$$

Definição – Função Geradora de Momentos

$$M(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} e^{tx} \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} e^{tx} \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Relação entre a fgm e o k -ésimo momento

$$M^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k M(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = E(X^k)$$

Fgm da soma de v.a. independentes

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a. independentes mas não necessariamente identicamente distribuídas. Seja:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

A fgm de Y é:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(X_1 + \dots + X_n)}) = E(e^{tX_1} \dots e^{tX_n}) =$$

e como consequência da independência

$$= E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n}) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

Definição – Função Geradora de Probabilidades

Seja X uma variável discreta com valores inteiros. A função geradora de probabilidades de X é definida como:

$$G(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \cdot \Pr(X = x)$$

Propriedades da Função Geradora de Probabilidades

$$1) \Pr(X = k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k G(s)}{ds^k} \right|_{s=0}$$

$$2) E(X) = \left. \frac{dG}{ds} \right|_{s=1}$$

$$3) E(X(X-1)) = \left. \frac{d^2 G}{ds^2} \right|_{s=1}$$

Desigualdade de Markov

Seja $u(X)$ uma função não negativa da variável aleatória X.

Se $E[u(X)]$ existe, então para qualquer constante positiva c temos:

$$\Pr(u(X) \geq c) \leq \frac{E(u(X))}{c}$$

Desigualdade de Chebyshev

$$\Pr((X - \mu)^2 \geq k^2) = \Pr(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2} \quad \text{ou analogamente} \quad \Pr(|X - \mu| \leq k) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Desigualdade de Jensen

$$E\{f(X)\} \geq f\{E(X)\}$$

alternativamente

$$f\{E(X)\} \leq E\{f(X)\} \quad \text{se } f \text{ é uma função convexa}$$

Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n iid com média μ e variância σ^2 , ambas finitas.

Então, para qualquer $n \geq 1$:

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Converge em probabilidade para $\mu = E(X_i)$ quando n tende a infinito.

O que significa que:

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{VAR}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

O Teorema Central do Limite (TCL)

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes tais que $E(X_i) = \mu_i$ e $\text{VAR}(X_i) = \sigma_i^2$, ambas finitas. Seja $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Então, sob condições bastante gerais podemos afirmar que:

$$Z = \frac{Y - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}$$

Tem aproximadamente uma distribuição $N(0,1)$.
Esta aproximação torna-se cada vez melhor à medida que n cresce.

Teorema Central do Limite (versão iid)

- Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) tais que $E(X_i) = \mu$ e $\text{VAR}(X_i) = \sigma^2$, ambas finitas.
- Seja $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Então, sob condições bastante gerais:
 - $Z = \frac{Y - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ Tem aproximadamente uma distribuição $N(0,1)$.
 - Esta aproximação torna-se cada vez melhor à medida que n cresce.

Teorema de DeMoivre e Laplace

Este teorema é apenas um caso particular do teorema central do limite, pois uma variável aleatória com distribuição Binomial pode ser encarada como a soma de n variáveis Bernoulli(p) independentes.

Seja $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ onde n é "grande" e p não está próximo de zero. Então:

$$Z = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{\text{VAR}(Y)}} = \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

tem aproximadamente uma distribuição $N(0,1)$.

$$\Pr(Y \leq y) = \Pr\left(\frac{Y - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{y - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{y - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{y - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Correção de Continuidade

Quantidade desejada na distribuição Binomial	Quantidade Calculada através da correção de continuidade	Expressão aproximada usando a densidade Normal
$\Pr(Y = y)$	$\Pr(y - 0.5 \leq Y \leq y + 0.5)$	$\Phi\left(\frac{y + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{y - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
$\Pr(Y \leq y)$	$\Pr(Y \leq y + 0.5)$	$\Phi\left(\frac{y + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
$\Pr(Y < y) = \Pr(Y \leq y - 1)$	$\Pr(Y \leq y - 1 + 0.5)$	$\Phi\left(\frac{y - 1 + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{y - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
$\Pr(Y \geq y)$	$\Pr(Y \geq y - 0.5)$	$1 - \Phi\left(\frac{y - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
$\Pr(Y > y) = \Pr(Y \geq y + 1)$	$\Pr(Y \geq y + 1 - 0.5)$	$1 - \Phi\left(\frac{y + 1 - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
$\Pr(a \leq Y \leq b)$	$\Pr(a - 0.5 \leq Y \leq b + 0.5)$	$\Phi\left(\frac{b + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,0000	50,00%	0,9800	83,65%	2,0000	97,72%
0,0200	50,80%	0,9900	83,89%	2,0100	97,78%
0,0300	51,20%	1,0000	84,13%	2,0125	97,79%
0,0400	51,60%	1,0100	84,38%	2,0200	97,83%
0,0500	51,99%	1,0167	84,54%	2,0300	97,88%
0,1000	53,98%	1,0250	84,73%	2,0400	97,93%
0,1500	55,96%	1,0500	85,31%	2,0412	97,94%
0,2000	57,93%	1,0553	85,44%	2,0500	97,98%
0,2236	58,85%	1,1000	86,43%	2,1000	98,21%
0,2500	59,87%	1,1180	86,82%	2,2000	98,61%
0,3000	61,79%	1,1475	87,44%	2,2361	98,73%
0,3015	61,85%	1,1500	87,49%	2,3000	98,93%
0,3333	63,06%	1,1553	87,60%	2,3263	99,00%
0,3475	63,59%	1,1667	87,83%	2,3333	99,02%
0,3492	63,65%	1,2000	88,49%	2,4000	99,18%
0,3500	63,68%	1,2060	88,61%	2,5000	99,38%
0,4000	65,54%	1,2200	88,88%	2,5500	99,46%
0,4167	66,16%	1,2500	89,44%	2,5628	99,48%
0,4307	66,67%	1,2700	89,79%	2,6000	99,53%
0,4500	67,36%	1,2816	90,00%	2,6500	99,60%
0,5000	69,15%	1,3000	90,32%	2,6667	99,62%
0,5500	70,88%	1,3333	90,88%	2,6833	99,64%
0,5774	71,81%	1,3750	91,54%	2,7000	99,65%
0,6000	72,57%	1,4000	91,92%	2,7500	99,70%
0,6250	73,40%	1,4468	92,60%	2,8000	99,74%
0,6500	74,22%	1,4500	92,65%	2,9000	99,81%
0,6667	74,75%	1,5000	93,32%	2,9500	99,84%
0,6708	74,88%	1,5500	93,94%	3,0000	99,87%
0,7000	75,80%	1,5811	94,31%	3,1000	99,90%
0,7500	77,34%	1,6000	94,52%	3,1500	99,92%
0,8000	78,81%	1,6450	95,00%	3,1667	99,92%
0,8333	79,77%	1,6667	95,22%	3,2000	99,93%
0,8500	80,23%	1,7000	95,54%	3,8333	99,99%
0,8666	80,69%	1,8000	96,41%	4,0833	100,00%
0,8944	81,45%	1,8333	96,66%		
0,9000	81,59%	1,8500	96,78%		
0,9167	82,03%	1,9000	97,13%		
0,9500	82,89%	1,9500	97,44%		
0,9600	83,15%	1,9600	97,50%		
0,9700	83,40%	1,9800	97,61%		
0,9722	83,45%	1,9900	97,67%		
0,9750	83,52%	1,9950	97,70%		