ENCE – TEORIA DE PROBABILIDADE II – SEMESTRE 2009.01 – Profa. Mônica Barros
Teste 3 – 16/07/2009
GABARITO

Problema 1

Sejam X_1, ..., X_{20} iid com a seguinte densidade: f(x) = kx se 0 < x < 1.

a) Ache k
b) Calcule a probabilidade de $X_{(20)}$ ser maior que 0.9

Solução

a) $\int_0^1 kxdx = 1 \Rightarrow k\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{k}{2} = 1 \Rightarrow k = 2$

b) A função de distribuição é: F(x) = 0 se x < 0, F(x) = 1 se x >1 e:

$$F(x) = \int_0^x 2udu = x^2 \quad \text{se} \quad 0 < \text{x} < 1$$

A densidade de $X_{(20)}$ é:

$$f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x).F^{k-1}(x)\{1-F(x)\}^{n-k}$$

$$f_{20}(x) = \frac{20!}{(20-1)!(20-20)!} 2x.\{x^2\}^{20-1}\{1-x^2\}^{20-20} = \frac{20!}{19!}(2)x(x^2)^{19} = 40.x.x^{38} = 40.\text{x}^{39} \qquad 0 < \text{x} < 1$$

$$\Pr\{X_{(20)} > 0.9\} == \int_{0.9}^1 40x^{39}dx = \left.x^{40}\right|_{0.9}^1 = 1-(0.9)^{40} = 0.9852$$

Problema 2

Seja X uma v.a. contínua com densidade:

$$f(x) = \frac{5}{x^6} \quad \text{para } x > 1$$

Calcule E(X) e E(X | X > 3).

Solução

A densidade "usual"(definida no intervalo (1, ∞)) tem média:

$$E(X) = \int_1^\infty x.\frac{5}{x^6}\,dx = 5\left(\frac{1}{-4x^4}\right)\Bigg|_1^\infty = -\frac{5}{4}\left(\frac{1}{x^4}\right)\Bigg|_1^\infty = -\frac{5}{4}(0-1) = \frac{5}{4}$$

Agora é preciso determinar quem é a densidade definida apenas no intervalo (3, ∞). Note que esta precisa ser uma densidade propriamente dita, ou seja, integrar a um.

Então precisamos achar uma constante <u>c</u> tal que:

$$\int_3^\infty c\frac{5}{x^6}\,dx = 1 \Rightarrow 5c\left(\frac{x^{-5}}{-5}\right)\Bigg|_3^\infty = -c.x^{-5}\Big|_3^\infty = 1 \Rightarrow -c\left(0-\frac{1}{243}\right) = \frac{c}{243} = 1 \Rightarrow c = 243$$

Logo, a densidade definida apenas em x > 3 é:

$$g(x) = \frac{243(5)}{x^6} = \frac{1215}{x^6} \quad \text{para } x > 3$$

E(X| X > 3) = $\displaystyle\int_3^\infty x\frac{1215}{x^6}\,dx = 1215\left(\frac{x^{-4}}{-4}\right)\Bigg|_3^\infty = -\frac{1215}{4}x^{-4}\Big|_3^\infty = -\frac{1215}{4}\left(0-\frac{1}{81}\right) = \frac{1215}{4(81)} = \frac{15}{4}$

Problema 3

Seja X uma variável aleatória Binomial(n,p)

1) Calcule a função geradora de probabilidades de X.
2) A partir da função geradora de probabilidades, mostre que a média é n.p e a variância de X é n.p.q onde q = 1- p.

Dica: Teorema Binomial

Dica 2: cuidado com os limites do somatório que definem a função geradora de probabilidades – eles devem corresponder aos valores possíveis de X

Solução

A função geradora de probabilidades de X é:

$$G(s) = E(s^X) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} s^x p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (ps)^x (q)^{n-x} = (ps+q)^n$$ (usando o teorema Binomial)

A 1ª. derivada de G(s) é:

$$\frac{dG}{ds} = n(ps+q)^{n-1} p = n.p.(ps+q)^{n-1}$$

Avaliando esta derivada em s = 1 leva a:

$$E(X) = \left.\frac{dG}{ds}\right|_{s=1} = n.p(p+q)^{n-1} = n.p \qquad \text{pois } p + q = 1$$

A 2ª. derivada de G(s) é:

$$\frac{d^2G}{ds^2} = np(n-1)(ps+q)^{n-2} p = n(n-1)p^2(ps+q)^{n-2}$$

Avaliando esta derivada em s = 1 leva a:

$$E\{X(X-1)\} = E\{X^2 - X\} = E(X^2) - E(X) = \left.\frac{d^2G}{ds^2}\right|_{s=1} = n(n-1)p^2$$

Logo:

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 + E(X) = n(n-1)p^2 + np$$

Assim:

$$VAR(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq$$

Problema 4

O peso de um pacotes de café de 500g é uma variável aleatória Uniforme no intervalo (500 - 4√3, 500 +4√3).

O produtor de café embala seus produtos em caixas contendo 36 pacotes. Calcule a probabilidade do peso total de uma caixa (considerando apenas o peso dos pacotes) estar entre 17988g e 18048g.

Solução

Seja X_i o peso do i-ésimo pacote. Então, $E(X_i) = 500$ e $VAR(X_i) = 16$.
Seja Y o peso total dos 36 pacotes.
Então E(Y) = 36(500) = 18000g = 18 kg
E VAR(Y) = 36(16) e assim dp(Y) = 6(4) = 24 g
Pelo TCL:

$Z = \frac{Y-18000}{\sqrt{36(16)}} = \frac{Y-18000}{24}$ é aproximadamente N(0,1)

$$\Pr\{17988 < Y < 18048\} = \Pr\left\{\frac{17988-18000}{24} < \frac{Y-18000}{24} < \frac{18048-18000}{24}\right\} \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{48}{24}\right) - \Phi\left(\frac{-12}{24}\right) = \Phi(+2) - \Phi(-0.5) = 0.9773 - 0.3085 = 0.6687$$

Problema 5

A densidade conjunta de X e Y é:

$$f(x,y) = kx.e^{-\frac{xy}{2}} \quad \text{se } 0 < \text{x} < 4 \quad \text{e} \quad \text{y} > 0$$

a) Ache k que faz desta expressão uma densidade.

b) Ache a densidade marginal de X. (Dica – é uma densidade conhecida)

c) Ache a densidade condicional de Y dado X = x. (Dica – é uma densidade conhecida)

d) Ache a média condicional de Y dado X = x. (Dica – se você reconheceu qual é a densidade do item c, não precisa fazer as contas, apenas citar os resultados conhecidos)

e) Ache a variância condicional de Y dado X = x. (Dica – se você reconheceu qual é a densidade do item c, não precisa fazer as contas, apenas citar os resultados conhecidos)

Dica: veja as integrais no formulário em anexo

Solução

$$a)\int_0^4\int_0^\infty k.x.e^{-xy/2}dydx = k\int_0^4 x\left\{\frac{e^{-xy/2}}{-x/2}\right\}\Bigg|_{y=0}^{\infty} dx = k\int_0^4 x\left\{0-\frac{1}{-x/2}\right\}dx = k\int_0^4 x\left(\frac{2}{x}\right)dx = 2k\int_0^4 dx = 2k(x)\Big|_{x=0}^{4}$$
$$= 2k(4) = 8k = 1 \rightarrow k = 1/8$$

$$b) f_X(x) = \int_0^\infty \frac{1}{8}x.e^{-xy/2}dy = \frac{x}{8}\left\{\frac{e^{-xy/2}}{-x/2}\right\}\Bigg|_0^\infty = \frac{x}{8}\left\{0+\frac{2}{x}\right\} = \frac{1}{4} \quad \text{para } 0 < \text{x} < 4$$

Ou seja, a marginal de X é Uniforme no intervalo (0,4).

$c)\, f_{Y|X} = \dfrac{(1/8)x.e^{-xy/2}}{1/4} = \dfrac{x}{2}.\exp\left(-xy/2\right)$ para y > 0. Ou seja, dado X = x, Y é Exponencial com parâmetro λ = x/2, ou seja, média 2/x e variância $(2/x)^2$, o que já resolve os itens d) e e).

ENCE – Teoria da Probabilidade II - Profa. Mônica Barros
FORMULÁRIO

Nome	Densidade ou Função de Probabilidade	Média	Variância	fgm
Uniforme	$f(x)=\dfrac{1}{b-a}\quad \text{se } a\le x\le b$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	Não é útil
Exponencial	$f(x)=\lambda.\exp(-\lambda.x)\quad \text{onde } \lambda>0 \text{ e } x\ge 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)$ se $t<\lambda$
Gama	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}.x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.e^{-\beta x}, \text{ onde x} \ge 0\\ 0 \text{ se x} < 0\end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha}$ se $t<\beta$
Qui-Quadrado	$f(x)=\dfrac{1}{2^{n/2}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}$	n	2n	$\left(\dfrac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ se $t<1/2$
Binomial	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$ para $x=0,1,2,\dots,n$	n.p	n.p.q	$(pe^t+q)^n$
Hipergeométrica	$f(x)=\Pr(X=x)=\dfrac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n.\left(\dfrac{r}{N}\right)$	$n.\left(\dfrac{r}{N}\right)\left(1-\dfrac{r}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$	Não é útil
Geométrica	$f(n)=\Pr(X=n)=(1-p)^{n-1}p$ onde n = 1, 2, 3, ...	1/p	q/p^2	$M(t)=\dfrac{pe^t}{1-qe^t}$
Poisson	$\Pr(X=x)=f(x)=\dfrac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!}$ onde x = 0, 1, 2, ...	λ	λ	$E(e^{tX})=e^{\lambda.(e^t-1)}$
Binomial Negativa	$f(x)=\Pr(X=x)=\binom{x-1}{r-1}.p^r.q^{x-r}$ onde x = r, r + 1, r + 2, ...	r/p	$r.q/p^2$	$M(t)=\left(\dfrac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

Resultados Matemáticos
Série Geométrica $$\sum_{k=0}^{\infty}a^k=1+a+a^2+a^3+.....=\frac{1}{1-a}\quad \text{desde que } \lvert a\rvert<1$$
Teorema Binomial $$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\quad \text{onde a e b são número reais e k, n são inteiros} \ge 0$$
Série de Taylor da Exponencial $$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^k}{k!}+......$$

Função Gama

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}.e^{-t}dt$$

Propriedades da Função Gama

1) $\Gamma(n) = (n-1).\Gamma(n-1)$ para n > 1
2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ se n é inteiro > 1
3) $\Gamma(1) = 0! = 1$
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Integrais Relevantes

$$\int u.e^{au}du = \frac{e^{au}}{a}.\left(u - \frac{1}{a}\right)$$

$$\int u^2.e^{au}du = \frac{e^{au}}{a^3}.\left(a^2u^2 - 2.a.u + 2\right) - \frac{2}{a^3}$$

$$\int u^3.e^{au}du = \frac{e^{au}}{a^4}.\left(a^3u^3 - 3.a^2.u^2 + 6.a.u - 6\right) + \frac{6}{a^4}$$

Padronização de uma variável aleatória

Se X tem média a e variância b^2 então Z = (X-a)/b tem média 0 e variância 1. Se, além disso, X é Normal, Z também é Normal.

Densidade Lognormal

Se X é $N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = e^X$ é Lognormal. Pode-se provar que $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ e
$VAR(Y) = \exp\left(2\mu + \sigma^2\right).\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$

Densidade Beta

$$f(x) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}x^{m-1}(1-x)^{n-1} \quad \text{onde } 0 < x < 1 \text{ e m, n inteiros} \geq 1$$

Se X ~ Beta (m, n) então:

$$E(X) = \frac{m}{m+n}$$

$$VAR(X) = \frac{mn}{(m+n+1)\ (m+n)^2}$$

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(k+m)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(k+m+n)}$$

Densidade Lognormal

Se X é $N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = e^X$ é Lognormal. Pode-se provar que $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ e
$VAR(Y) = \exp\left(2\mu + \sigma^2\right).\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$

Teorema – Aditividade da Qui-quadrado

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias **independentes** e X_i é Qui-Quadrado com k_i graus de liberdade. Então $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ é também Qui-Quadrado, com $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ graus de liberdade.

Teorema – Relação entre Normal e Qui-Quadrado

Seja Z ~ N(0,1) . Então $V = Z^2$ tem densidade Qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

Fórmulas de "Adão e Eva"

$$E_X(X) = E_Y\{E_{X|Y}(X|Y)\} \qquad (1)$$

e

$$VAR_X(X) = E_Y\{VAR_{X|Y}(X|Y)\} + VAR_Y\{E_{X|Y}(X|Y)\} \qquad (2)$$

Teorema - A densidade de X(k) a k-ésima estatística de ordem, é:

$$f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}f(x).F^{k-1}(x)\{1 - F(x)\}^{n-k}$$

Teorema – Estatísticas de Ordem de amostra Unif(0,1)
Sejam X1, X2, ... , Xn variáveis aleatórias independentes com densidade Unif(0,1).
Seja X(k) a k-ésima estatística de ordem da amostra.
Então X(k) tem densidade Beta com parâmetros k e n – k + 1.

Densidade da Amplitude
Seja R = X(n) – X(1) a amplitude de uma amostra de tamanho n. Sua densidade é:

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < 0 \\ n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(r+x)\{F(r+x) - F(x)\}^{n-2} dx & \text{se } r > 0 \end{cases}$$

Se a amostra é Unif(0,1), este resultado se reduz a:

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < 0 \\ n(n-1)\int_{0}^{1-r} (1)(1)\{(r+x) - (x)\}^{n-2} dx = n(n-1).r^{n-2}(1-r) & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

$$f_R(r) = n(n-1)r^{n-2}(1\text{-}r) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-1)\Gamma(2)}\, r^{n-1-1}(1-r)^{2-1} \quad \text{se } \ 0 < r < 1$$

Normal Bivariada
A densidade de X1 e X2 é:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}.\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}.R\right\}$$

Onde:

$$R = \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2.\rho.\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right).\left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

A densidade marginal de X1 é $N(\mu_1,\sigma_1^2)$
A densidade marginal de X2 é $N(\mu_2,\sigma_2^2)$
As densidades condicionais também são Normais.
A densidade condicional de X1 dado X2 = x2 é:

$$(X_1 \mid X_2 = x_2) \sim N\left(\mu_1 + \rho.\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right).(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2.(1-\rho^2)\right)$$

A densidade condicional de X2 dado X1 = x1 é:

$$(X_2 \mid X_1 = x_1) \sim N\left(\mu_2 + \rho.\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right).(x_1 - \mu_1), \sigma_2^2.(1-\rho^2)\right)$$

Definição – Função Geradora de Momentos

$$M(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{se X é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo x}} e^{tx}.f(x) = \sum_{\text{todo x}} e^{tx}.\Pr(X = x) & \text{se X é v.a. discreta} \end{cases}$$

Relação entre a fgm e o k-ésimo momento

$$M^{(k)}(0) = \left.\frac{d^k M(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = E(X^k)$$

Fgm da soma de v.a. independentes

Sejam X1, X2, ..., Xn v.a. independentes mas não necessariamente identicamente distribuídas. Seja:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

A fgm de Y é:

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t(X_1+...+X_n)}\right) = E\left(e^{tX_1}....e^{tX_n}\right) =$$

$$\text{e como conseqüência da independência}$$

$$= E\left(e^{tX_1}\right)E\left(e^{tX_2}\right)...E\left(e^{tX_n}\right) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)...M_{X_n}(t)$$

Definição – Função Geradora de Probabilidades

Seja X uma variável discreta com valores inteiros. A função geradora de probabilidades de X é definida como:

$$G(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x.\Pr(X = x)$$

Propriedades da Função Geradora de Probabilidades

1) $\Pr(X = k) = \dfrac{1}{k!}\dfrac{d^k G(s)}{ds^k}\Bigg|_{s=0}$

2) $E(X) = \dfrac{dG}{ds}\Bigg|_{s=1}$

3) $E(X(X-1)) = \dfrac{d^2G}{ds^2}\Bigg|_{s=1}$

Desigualdade de Markov

Seja u(X) uma função não negativa da variável aleatória X.
Se E [u(X)] existe, então para qualquer constante positiva c temos:

$$\Pr(u(X) \geq c) \leq \frac{E(u(X))}{c}$$

Desigualdade de Chebyshev

$\Pr\left((X-\mu)^2 \geq k^2\right) = \Pr\left(|X-\mu| \geq k\right) \leq \dfrac{\sigma^2}{k^2}$ ou analogamente $\Pr\left(|X-\mu| \leq k\right) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{k^2}$

Desigualdade de Jensen

$$E\{f(X)\} \geq f\{E(X)\}$$

$$\text{alternativamente}$$

$$f\{E(X)\} \leq E\{f(X)\} \quad \text{se f é uma função convexa}$$

Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam X1, X2, ..., Xn iid com média μ e variância σ2, ambas finitas.

Então, para qualquer n ≥ 1:

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

Converge em probabilidade para μ = E(Xi) quando n tende a infinito.
O que significa que:

$$\Pr\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{VAR\left(\overline{X}_n\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n.\varepsilon^2} \to 0 \text{ quando n} \to \infty$$

O Teorema Central do Limite (TCL)

Sejam X1, X2, ..., Xn variáveis aleatórias independentes tais que E(Xi) = μi e VAR(Xi) = σi2 , ambas finitas. Seja Y = X1 + X2 + ... + Xn. Então, sob condições bastante gerais podemos afirmar que:

$$Z = \frac{Y - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$$

Tem aproximadamente uma distribuição N(0,1).
Esta aproximação torna-se cada vez melhor à medida que n cresce.

Teorema Central do Limite (versão iid)

- Sejam X1, X2, ..., Xn variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) tais que E(Xi) = μ e VAR(Xi) = σ2, ambas finitas.
- Seja Y = X1 + X2 + ... + Xn. Então, sob condições bastante gerais:
- $Z = \frac{Y - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ Tem aproximadamente uma distribuição N(0,1).
- Esta aproximação torna-se cada vez melhor à medida que n cresce.

Teorema de DeMoivre e Laplace

Este teorema é apenas um caso particular do teorema central do limite, pois uma variável aleatória com distribuição Binomial pode ser encarada como a soma de n variáveis Bernoulli(p) independentes.

Seja Y ~ Bin(n, p) onde n é "grande" e p não está próximo de zero. Então:

$$Z = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{VAR(Y)}} = \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

tem aproximadamente uma distribuição N(0,1).

$$\Pr(Y \le y) = \Pr\left(\frac{Y - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{y - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Pr\left(Z \le \frac{y - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{y - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Correção de Continuidade

Quantidade desejada na distribuição Binomial	Quantidade Calculada através da correção de continuidade	Expressão aproximada usando a densidade Normal
Pr(Y = y)	Pr(y - 0.5 ≤ Y ≤ y + 0.5)	$\Phi\left(\frac{y+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{y-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(Y ≤ y)	Pr(Y ≤ y +0.5)	$\Phi\left(\frac{y+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(Y < y) = Pr(Y ≤ y-1)	Pr(Y ≤ y - 1 + 0.5)	$\Phi\left(\frac{y-1+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{y-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(Y ≥ y)	Pr(Y ≥ y - 0.5)	$1-\Phi\left(\frac{y-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(Y > y) = Pr(Y ≥ y +1)	Pr(Y ≥ y + 1 - 0.5)	$1-\Phi\left(\frac{y+1-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$
Pr(a ≤ Y ≤ b)	Pr(a - 0.5 ≤ Y ≤ b + 0.5)	$\Phi\left(\frac{b+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$

Tabela – Função de Distribuição N(0,1)

z	Φ(z)		z	Φ (z)		z	Φ (z)
0,0000	50,00%		0,9800	83,65%		2,0000	97,72%
0,0200	50.80%		0,9900	83,89%		2,0100	97,78%
0,0300	51.20%		1,0000	84,13%		2,0125	97,79%
0,0400	51.60%		1,0100	84.38%		2.0200	97.83%
0,0500	51,99%		1.0167	84.54%		2.0300	97.88%
0,1000	53,98%		1.0250	84.73%		2.0400	97.93%
0,1500	55,96%		1,0500	85,31%		2.0412	97.94%
0,2000	57,93%		1,0553	85,44%		2.0500	97.98%
0,2236	58,85%		1,1000	86,43%		2,1000	98,21%
0,2500	59,87%		1,1180	86,82%		2,2000	98,61%
0,3000	61,79%		1,1475	87,44%		2,2361	98,73%
0,3015	61,85%		1,1500	87,49%		2,3000	98,93%
0,3333	63,06%		1,1553	87,60%		2,3263	99,00%
0,3475	63,59%		1,1667	87,83%		2,3333	99,02%
0,3492	63,65%		1,2000	88,49%		2,4000	99,18%
0,3500	63,68%		1,2060	88,61%		2,5000	99,38%
0,4000	65,54%		1,2200	88,88%		2,5500	99,46%
0.4167	66.16%		1,2500	89,44%		2,5628	99,48%
0,4307	66,67%		1.2700	89.79%		2,6000	99,53%
0,4500	67,36%		1,2816	90,00%		2,6500	99,60%
0,5000	69,15%		1,3000	90,32%		2,6667	99,62%
0,5500	70,88%		1,3333	90,88%		2,6833	99,64%
0,5774	71.81%		1,3750	91.54%		2,7000	99,65%
0,6000	72,57%		1,4000	91,92%		2.7500	99.70%
0,6250	73,40%		1,4468	92,60%		2,8000	99,74%
0,6500	74,22%		1,4500	92,65%		2,9000	99,81%
0,6667	74,75%		1,5000	93,32%		2,9500	99,84%
0,6708	74,88%		1,5500	93,94%		3,0000	99,87%
0,7000	75,80%		1,5811	94,31%		3,1000	99,90%
0,7500	77,34%		1,6000	94,52%		3,1500	99,92%
0,8000	78,81%		1,6450	95,00%		3,1667	99,92%
0,8333	79.77%		1,6667	95,22%		3,2000	99,93%
0,8500	80,23%		1,7000	95,54%		3,8333	99,99%
0.8666	80.69%		1,8000	96,41%		4,0833	100,00%
0,8944	81,45%		1,8333	96,66%			
0,9000	81,59%		1.8500	96.78%			
0,9167	82,03%		1,9000	97,13%			
0,9500	82,89%		1.9500	97.44%			
0,9600	83,15%		1,9600	97,50%			
0,9700	83,40%		1,9800	97,61%			
0,9722	83,45%		1,9900	97.67%			
0,9750	83,52%		1,9950	97,70%			