

# Probabilidade II

## Aula 10

Maio de 2009

Mônica Barros, D.Sc.

monica.barros@ibge.gov.br

1

## Conteúdo

- Esperança Matemática (Valores esperados)
- Momentos e Momentos Centrais
- Valores esperados de uma função de X
- Covariância e Correlação
- Matriz de covariância, matriz de correlação
- Médias e variâncias de combinações lineares de v.a.
- Portfolios (Carteiras) e risco
- A distribuição Normal bivariada

monica.barros@ibge.gov.br

2

## Esperança matemática

- **Momentos**
- Servem para caracterizar uma distribuição de probabilidade ou uma amostra.
- Aqui estaremos interessados *apenas* nos momentos da distribuição (e não nos momentos amostrais).

monica.barros@ibge.gov.br

3

## Esperança matemática

- **Definição (k-ésimo momento)**
- O k-ésimo momento de X, ou k-ésimo momento da distribuição de X, denotado por  $E(X^k)$  é definido por:

$$E(X^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} x^k \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} x^k \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

- **Acima k é um inteiro maior ou igual a zero. Em particular, se  $k = 0$ ,  $E(X^0) = E(1) = 1$ .**

monica.barros@ibge.gov.br

4

## Esperança matemática

- **Definição (média ou valor esperado)**
- A **média** (ou **valor esperado** ou **primeiro momento**) de uma variável aleatória é definida como:

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} x \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} x \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

- A média de uma variável aleatória é uma medida de tendência central da distribuição de probabilidade desta variável aleatória.

## Esperança matemática

- Podemos combinar a definição do **k-ésimo momento** e a definição da média para produzir o **k-ésimo momento central**, como a seguir:

$$E((X - \mu)^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^k \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^k \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

- Em particular, se **k = 1**:  $E(X - \mu) = 0$ , ou seja, o **primeiro momento central é sempre nulo**.

## Esperança matemática

- Se **k = 1** então:

$$\begin{aligned} E(X - \mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx - \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx - \mu(1) = \\ &= \mu - \mu = 0 \end{aligned}$$

- (Idem para o caso discreto)

## Esperança matemática

- **Definição (Variância)**
- A **variância** de uma variável aleatória mede a dispersão da distribuição de probabilidade, e é definida como o **2o. momento central**:

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E((X - \mu)^2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ discreta} \end{cases}$$

## Esperança matemática

- Valor esperado de uma função de uma v.a.
  - Seja  $X$  uma v.a. com densidade (ou função de probabilidade  $f(x)$ ).
  - Seja  $g(X)$  uma função qualquer de  $X$ .
  - Então, o valor esperado de  $g(X)$  (se existir) é dado por:

$$E(g(X)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \\ \sum_{\text{todo } x} g(x)f(x) = \sum_{\text{todo } x} g(x)\Pr(X = x) \end{cases}$$

monica.barros@ibge.gov.br

9

## Esperança matemática

- Note que, para calcularmos  $E\{g(X)\}$  não é necessário conhecer a distribuição da v.a.  $g(X)$ .
- Também, se  $g(X) = X^k$ , a expressão anterior nos dá o  $k$ -ésimo momento, e se  $g(X) = (X-\mu)^k$  obtemos o  $k$ -ésimo momento central.

monica.barros@ibge.gov.br

10

## Esperança Matemática

- A definição de valor esperado pode ser facilmente estendida a distribuições conjuntas de variáveis aleatórias.
- Aqui nos concentraremos no caso bivariado.
- Em geral, se  $f(x,y)$  é a densidade (ou função de probabilidade conjunta) de  $X$  e  $Y$  então:

monica.barros@ibge.gov.br

11

## Esperança Matemática

$$E\{g(X,Y)\} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy \\ \sum_{\text{todo } x} \sum_{\text{todo } y} g(x,y)f(x,y) = \sum_{\text{todo } x} \sum_{\text{todo } y} g(x,y)\Pr(X = x, Y = y) \end{cases}$$

- Por exemplo:

$$E\{XY\} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x.y.f(x,y)dxdy \\ \sum_{\text{todo } x} \sum_{\text{todo } y} x.y.f(x,y) = \sum_{\text{todo } x} \sum_{\text{todo } y} x.y.\Pr(X = x, Y = y) \end{cases}$$

monica.barros@ibge.gov.br

12

## Esperança Matemática

□ **E também:**

$$E\{X + Y\} = \begin{cases} \int \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (x + y) f(x, y) dx dy \\ \sum_{\text{todo } x} \sum_{\text{todo } y} (x + y) \cdot f(x, y) = \sum_{\text{todo } x} \sum_{\text{todo } y} (x + y) \cdot \Pr(X = x, Y = y) \end{cases}$$

- **A extensão para funções de n variáveis é imediata – basta computar a integral (ou somatório) em n dimensões da conjunta vezes a função para a qual desejamos calcular o valor esperado.**

## Esperança Matemática

□ **Covariância e Correlação**

- O coeficiente de correlação entre X e Y, denotado por  $\rho$ , é definido como:

$$\rho = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{VAR(X)} \cdot \sqrt{VAR(Y)}}$$

- Já provamos que  $-1 \leq \rho \leq +1$  e  $|\rho| = 1$  se, e somente se, Y é função linear de X (e vice-versa).
- Note que  $COV(X, Y) = COV(Y, X) = \rho \cdot dp(X) \cdot dp(Y)$  onde  $dp(\cdot)$  indica o desvio padrão da variável.

## Esperança Matemática

□ **Covariância e Correlação**

- Já vimos na aula 2 a definição de covariância e correlação.

$$\begin{aligned} COV(X, Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[X \cdot Y - \mu_X \cdot Y - \mu_Y \cdot X + \mu_X \cdot \mu_Y] = \\ &= [E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot E(Y) - \mu_Y \cdot E(X) + \mu_X \cdot \mu_Y] = \\ &= E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y \end{aligned}$$

- Onde  $\mu_X = E(X)$ ,  $\mu_Y = E(Y)$  são as médias de X e Y, computadas a partir das densidades marginais.

## Esperança Matemática

□ **Matrizes de Covariância e de Correlação**

- Estas idéias podem ser estendidas para um conjunto de n variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .
- Seja X o vetor de dimensão n x 1 cuja i-ésima linha é  $X_i$ .
- Então, a matriz de covariância de X é a matriz n x n cujo ij-ésimo elemento é  $COV(X_i, X_j)$ .

## Esperança Matemática

### Matrizes de Covariância e de Correlação

- Das propriedades da covariância, segue que os elementos da diagonal principal da matriz de covariância são iguais às variâncias dos  $X$ 's.
- Também, como  $COV(X_i, X_j) = COV(X_j, X_i)$ , a matriz de covariância é simétrica.

## Esperança Matemática

### Matrizes de Covariância e de Correlação

- A matriz de correlação é a matriz  $n \times n$  cujo  $ij$ -ésimo elemento é o coeficiente de correlação entre  $X_i$  e  $X_j$ .
- Note que o coeficiente de correlação entre  $X_i$  e  $X_j$  é igual ao coeficiente de correlação entre  $X_j$  e  $X_i$  e então a matriz de correlação também é simétrica.
- E os elementos da diagonal principal? São todos iguais a um. (Por que?)

## Esperança Matemática

### Matrizes de Covariância e de Correlação

- Então, a matriz de covariância é a matriz  $n \times n$  com a forma:

$$\begin{pmatrix} \text{var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{var}(X_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Cov}(X_1, X_n) & \text{Cov}(X_2, X_n) & \dots & \text{var}(X_n) \end{pmatrix}$$

## Esperança Matemática

### Matrizes de Covariância e de Correlação

- Logo, a matriz de correlação tem a forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{Corr}(X_1, X_2) & \dots & \text{Corr}(X_1, X_n) \\ \text{Corr}(X_1, X_2) & 1 & \dots & \text{Corr}(X_2, X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Corr}(X_1, X_n) & \text{Corr}(X_2, X_n) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

## Combinações Lineares de v.a. Independentes

### Objetivos

- Dados  $X_1, X_2, \dots, X_n$  **independentes** (mas não necessariamente identicamente distribuídos) tais que:  $E(X_i) = \mu_i$  e  $VAR(X_i) = \sigma_i^2$ , encontrar a **média e a variância** de:

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

- em função dos momentos dos  $X_i$ 's. Note que, na definição de  $Y$ , os  $a_i$ 's são constantes.
- Também, a independência dos  $X_i$ 's assegura que todas as covariâncias (e correlações) são nulas.

## A soma de v.a. independentes

- Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a. independentes mas não necessariamente identicamente distribuídas.

- Seja:  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$

## Combinações Lineares de v.a. Independentes

- A média de  $Y$  é:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) = \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \quad \text{onde } \mu_i = E(X_i) \end{aligned}$$

- A variância de  $Y$  é:

$$\begin{aligned} VAR(Y) &= \sum_{i=1}^n a_i^2 VAR(X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \\ \text{onde } VAR(X_i) &= \sigma_i^2 \end{aligned}$$

- Note que a constante  $a_0$  não afeta a variância, e os outros  $a_i$ 's aparecem ao quadrado (por que?).

## A soma de v.a. independentes

- Então a média de  $Y$  é:

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \text{onde } \mu_i = E(X_i)$$

- A variância de  $Y$  é:

$$VAR(Y) = \sum_{i=1}^n VAR(X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad \text{onde } VAR(X_i) = \sigma_i^2$$

## A Média Amostral

- **Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a. independentes e identicamente distribuídas (iid).**
- **Em particular, o fato dos  $X$ 's serem iid implica em  $E(X_i) = \mu$ ,  $VAR(X_i) = \sigma^2$  e  $COV(X_i, X_j) = 0$  para todo par  $i, j$ .**
- **Considere a média amostral calculada a partir destes  $X_i$ 's, isto é:  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$**

## A Média Amostral

- **Podemos encontrar a média, variância e fgm da média amostral como casos particulares dos resultados para combinações lineares de variáveis independentes.**
- **É fácil mostrar que:**

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

(A mesma que a média de qualquer  $X_i$ )

## A Média Amostral

- **Para que serve a média amostral?**
- **Suponha que existe esta coleção de  $X_i$ 's, todos eles iid, ou seja, todos eles provêm da mesma densidade ou função de probabilidade.**
- **Suponha que a média desta densidade é  $\mu$ , um número desconhecido.**
- **A média amostral é um estimador “sensato” para a média da distribuição ( $\mu$ ), quando esta última for desconhecida.**

## A Média Amostral

- **Mas, a variância da média amostral é:**

$$VAR(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} VAR(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

(A variância de  $\bar{X}$  é menor que a de  $X_i$ , desde que usemos mais de uma observação !)

- **Moral da história: é vantajoso usar a média amostral para “chutar” a média da densidade dos  $X$ 's, pois ela implica numa redução da variância se comparada ao uso de um  $X_i$  sozinho.**

## A Média Amostral

- Estes resultados justificam o uso da média amostral como um estimador “sensato” de  $\mu$ .
- Note que, à medida que tomamos uma amostra cada vez maior ( $n$  cresce), a variância da média amostral decresce, ou seja, a “dispersão” do estimador decresce. Além disso, a média de  $\bar{X}$  é  $\mu$ , que é a quantidade que ele pretende estimar.

## Combinações Lineares de v.a. Dependentes

- Este é um caso mais geral (e mais complicado que o anterior).
- Suponha que  $E(X_i) = \mu_i$ ,  $VAR(X_i) = \sigma_i^2$ , e  $COV(X_i, X_j) = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \neq 0$  para algum par  $i, j$ .
- Queremos encontrar a média e a variância de  $Y$  definido como:  $Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$

## Combinações Lineares de v.a. Dependentes

- A expressão da média é a mesma que no caso anterior (variáveis independentes), isto é:

$$E(Y) = E\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) =$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \quad \text{onde } \mu_i = E(X_i)$$

- A expressão para a variância torna-se mais complicada, pois deverá levar em conta as interdependências entre as variáveis. Pode-se mostrar que:

## Combinações Lineares de v.a. Dependentes

$$VAR(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 VAR(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j COV(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad \text{onde no 2o. termo } i \neq j$$

onde  $\rho_{ij}$  é o coeficiente de correlação entre  $X_i$  e  $X_j$

Ou seja, a dependência entre os  $X$ 's leva à presença de um termo adicional no cálculo da variância, devido às covariâncias entre os diversos  $X$ 's.

## Combinações Lineares de v.a. Dependentes

- A expressão anterior, que nos dá a **variância de uma combinação linear de variáveis dependentes**, é essencial para medir o **risco** de um portfolio ou carteira, como veremos mais tarde.
- Na verdade, a dependência entre ativos financeiros (que são variáveis aleatórias) pode ser usada de maneira proveitosa para reduzir o risco de um portfolio, num processo que chamamos de **“diversificação”**.

## Retorno Aritmético

- Suponha que  $P_t$  seja o preço de um ativo no instante  $t$ . O retorno (aritmético) deste ativo entre os instantes  $t-1$  e  $t$  é:

$$RA_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

- Em Finanças “quantitativas”, o retorno aritmético é pouco empregado, pois possui um grave inconveniente: como o preço de um ativo não pode ser menor que zero, o retorno aritmético tem um valor mínimo (quando  $P_t = 0$ ), igual a  $-1$ .

## Portfolios (Carteiras)

- Considere uma coleção de  $n$  ativos financeiros. Um **portfolio (ou carteira)** é apenas uma combinação linear destes ativos na qual a soma dos pesos é 1 (ou 100%).
- Algumas vezes requer-se também que todos os pesos sejam positivos, mas isso não é estritamente necessário.

## Retorno Geométrico

- Em Finanças, os retornos serão tratados como variáveis aleatórias, e um dos modelos mais simples supõe que os retornos são Normais (que iremos estudar no capítulo 7 do meu livro de Probabilidade). Mas, uma v.a. Normal é ilimitada. Então, o que fazer?
- Trabalhar com o **retorno Geométrico**, definido como:

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

## Retorno Geométrico

- O retorno geométrico é definido em toda a reta, então pode-se modelá-lo pela distribuição Normal.
- Retornos Geométricos são aditivos. Por exemplo, se queremos encontrar o retorno entre os dias 1 e 4:

$$R_{1,4} = \log\left(\frac{P_4}{P_1}\right) = \ln\left(\frac{P_4}{P_3} \frac{P_3}{P_2} \frac{P_2}{P_1}\right) = \ln\left(\frac{P_4}{P_3}\right) + \ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right) + \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

- Ou seja, o retorno Geométrico entre os dias 1 e 4 é apenas a soma dos retornos geométricos diários no período.
- Se a variação do período é pequena, os retornos geométrico e aritmético são aproximadamente iguais.

## Risco e Retorno de um Portfolio

- O **retorno esperado** (ou retorno médio) do portfolio é:

$$E(P) = \sum_{i=1}^n w_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i$$

- O **risco do portfolio** é dado pela sua variância (ou, preferencialmente, pelo seu desvio padrão, que está nas mesmas unidades que o retorno).

## Risco e Retorno de um Portfolio

- Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  os retornos de  $n$  ativos, tais que  $E(X_i) = \mu_i$ ,  $VAR(X_i) = \sigma_i^2$ , e  $COV(X_i, X_j) = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \neq 0$ .
- Seja  $P$  uma carteira, isto é:

$$P = \sum_{i=1}^n w_i X_i \quad \text{onde} \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

- **Qual o retorno esperado da carteira, e qual o seu risco (medido pela sua variância ou desvio padrão)?** Tudo isso pode ser encontrado a partir dos resultados mostrados nesta aula.

## Risco e Retorno de um Portfolio

$$VAR(P) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

onde  $\rho_{ij}$  é o coeficiente de correlação entre  $X_i$  e  $X_j$

- Qual o efeito do segundo termo na equação acima? Imagine que conseguíssemos encontrar ativos com correlações negativas. O efeito destes termos seria a redução da variância do portfolio! Isto é o que está por trás da idéia de **diversificação**. A gente pode reduzir o risco sem, necessariamente, diminuir o retorno.

## Risco e Retorno de um Portfolio

- A otimização de um portfolio é feita escolhendo-se os pesos  $w_i$ 's tal que alguma restrição é satisfeita.
- Um caso típico é: encontre os pesos tal que, para um retorno especificado, o risco é mínimo.
- Pode-se reescrever este problema como:
  - Dado  $E(P) = \text{constante}$ , encontre os pesos  $w_i$  ( $i= 1,2,\dots,n$ ) sujeitos à restrição  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$
  - e que minimizem  $\text{VAR}(P)$ .

monica.barros@ibge.gov.br

41

## Exemplo 1

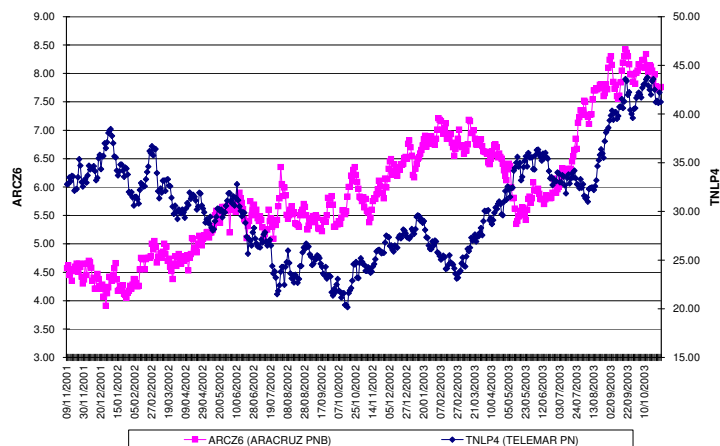
- A seguir trabalhamos com retornos diários e construímos portfolios compostos pelas seguintes ações:
  - TNLP4 (Telemar PN)
  - ARCZ6 (Aracruz Celulose PN)
- Os retornos diários (geométricos) foram calculados entre 12/11/2001 e 29/10/2003.
- O gráfico a seguir apresenta a evolução dos **preços** das duas ações no período.

monica.barros@ibge.gov.br

42

## Exemplo 1

ARACRUZ E TELEMAR PN DESDE NOV/2001

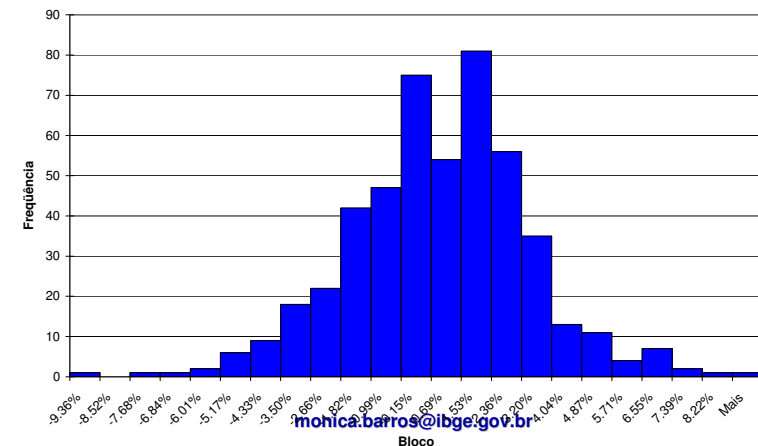


monica.barros@ibge.gov.br

43

## Exemplo 1

- O histograma dos retornos diários de ARCZ6 é:  
Histograma - retornos diários ARCZ6



monica.barros@ibge.gov.br

44

## Exemplo 1

- A correlação entre os retornos de TNLP4 e ARCZ6 é 0.1153, e a média e o desvio padrão dos retornos de cada uma das séries é:

	Retornos	
	ARCZ6	TNLP4
média	0.11%	0.05%
d.p.	2.48%	2.52%

- Seja  $P = \alpha \cdot \text{ARCZ6} + (1-\alpha) \cdot \text{TNLP4}$  o portfolio formado por  $\alpha\%$  de Aracruz e  $(1-\alpha)\%$  de Telemar. Como variam o retorno esperado e o risco do portfolio à medida que alteramos  $\alpha$ ?

## Exemplo 1

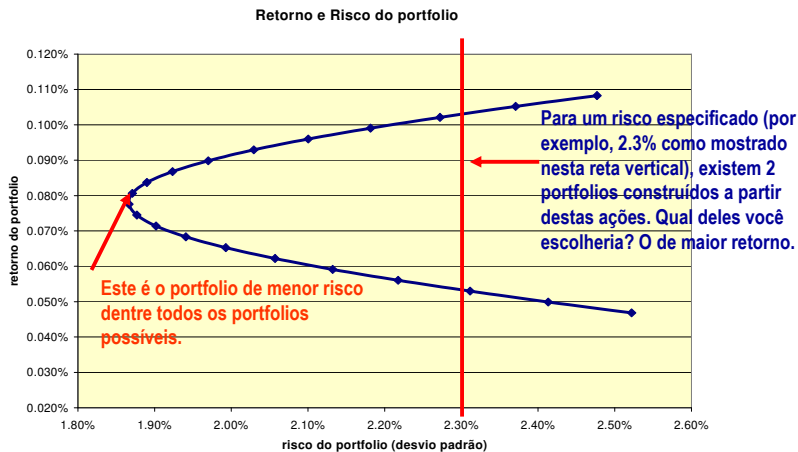
$\alpha$ (% de ARCZ6 no portfolio)	retorno esperado	risco do portfolio (desvio padrão)
0.00	0.047%	2.52%
0.05	0.050%	2.41%
0.10	0.053%	2.31%
0.15	0.056%	2.22%
0.20	0.059%	2.13%
0.25	0.062%	2.06%
0.30	0.065%	1.99%
0.35	0.068%	1.94%
0.40	0.071%	1.90%
0.45	0.074%	1.88%
0.50	0.078%	1.87%
0.55	0.081%	1.87%
0.60	0.084%	1.89%
0.65	0.087%	1.92%
0.70	0.090%	1.97%
0.75	0.093%	2.03%
0.80	0.096%	2.10%
0.85	0.099%	2.18%
0.90	0.102%	2.27%
0.95	0.105%	2.37%
1.00	0.108%	2.48%

Estes são o retorno e o risco do portfolio computados ao longo de todo o período (isto é, usando todos os retornos diários disponíveis)

Na próxima página exibimos este gráfico em termos de  $\alpha$ .

Qual o  $\alpha$  que leva ao portfolio de menor risco? Você consegue enxergar que, no caso de um portfolio com 2 ativos, a solução para este problema pode ser obtida analiticamente, e de maneira bem simples?

## Exemplo 1



## Exemplo 2

- Você quer montar um portfolio com dois ativos que têm as seguintes características:
- Ativo A: retorno médio = 3.6%, d.p. retorno = 8%
- Ativo B: retorno médio = 1.2%, d.p. retorno = 3%
- Suponha o caso mais geral, onde os dois ativos têm uma correlação  $r$  qualquer.
- Seja  $w$  a proporção do ativo A no portfolio.

## Exemplo 2

- ❑ Qual o retorno médio do portfólio (em percentual)?
- ❑ Qual a variância do portfólio em termos de  $w$  e  $\rho$ ?
- ❑ Qual o peso ( $w$ ) do ativo A que fornece o portfólio de variância mínima como função de  $\rho$ ?

monica.barros@ibge.gov.br

49

## Exemplo 2

$$\begin{aligned}
 VAR(P) &= w^2 \cdot VAR(A) + (1-w)^2 \cdot VAR(B) + 2w(1-w)\rho\sqrt{VAR(A)}\sqrt{VAR(B)} = \\
 &= w^2\left(\frac{8}{100}\right)^2 + (1-w)^2\left(\frac{3}{100}\right)^2 + 2w(1-w)\rho\left(\frac{8}{100}\right)\left(\frac{3}{100}\right) = \\
 &= \frac{1}{10^4} \{64w^2 + 9(1-2w+w^2) + 48\rho(w-w^2)\} \\
 &= \frac{1}{10^4} \{64w^2 + 9 - 18w + 9w^2 + 48\rho w - 48\rho w^2\} = \\
 &= \frac{1}{10^4} \{73w^2 - 48\rho w^2 - w(18-48\rho) + 9\}
 \end{aligned}$$

monica.barros@ibge.gov.br

51

## Exemplo 2

- ❑ O retorno médio do portfólio é, em qualquer condição:
  - ❑  $E(P) = w \cdot E(A) + (1-w) \cdot E(B) =$
  - ❑  $= 3.6w/100 + (1-w)(1.2/100) =$
  - ❑  $= \{3.6w + (1.2-1.2w)\}/100 = (2.4w+1.2)/100$
- ❑ A variância do portfólio é, como função de  $w$  e  $\rho$ :

monica.barros@ibge.gov.br

50

## Exemplo 2

- ❑ O portfólio de variância mínima é encontrado através de:

$$\frac{dVAR(P)}{dw} = 0 \Rightarrow 2(73)w - 96\rho w - (18 - 48\rho) = 0 \Rightarrow w = \frac{18 - 48\rho}{146 - 96\rho} = \frac{9 - 24\rho}{73 - 48\rho}$$

- ❑ O desvio padrão do portfólio é, em qualquer caso (como função de  $w$  e  $\rho$ ):

$$dp(P) = \frac{1}{100} \sqrt{73w^2 - 48\rho w^2 - w(18 - 48\rho) + 9}$$

monica.barros@ibge.gov.br

52

## Exemplo 2

- Calcule, nesta situação, quem é o peso ótimo e o dp do portfolio quando  $r = 0, 0.1, 0.2, 0.3, -0.1, -0.2, -0.3$ .

## A distribuição Normal Bivariada

- Esta densidade conjunta é chamada de densidade **Normal Bivariada** com parâmetros  $\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ , onde  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são números reais quaisquer,  $\rho$  está restrito ao intervalo  $(-1,1)$  e  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  são positivos.

- Se  $(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$  então:

## A distribuição Normal Bivariada

- É uma distribuição conjunta para duas variáveis  $X_1$  e  $X_2$ , ambas Normais e, a princípio dependentes.

- A densidade conjunta é dada por:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot R\right\}$$

- Onde  $R$  é:

$$R = \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho \cdot \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

## A distribuição Normal Bivariada

- A densidade marginal de  $X_1$  é  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
- A densidade marginal de  $X_2$  é  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- As densidades condicionais também são Normais.
- A densidade condicional de  $X_1$  dado  $X_2 = x_2$  é:  $(X_1 | X_2 = x_2) \sim N\left(\mu_1 + \rho \cdot \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \cdot (x_2 - \mu_2), \sigma_1^2 \cdot (1 - \rho^2)\right)$
- A densidade condicional de  $X_2$  dado  $X_1 = x_1$  é:  $(X_2 | X_1 = x_1) \sim N\left(\mu_2 + \rho \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \cdot (x_1 - \mu_1), \sigma_2^2 \cdot (1 - \rho^2)\right)$

## A distribuição Normal Bivariada

- *Dada uma densidade Normal bivariada, quais são as suas características mais importantes ?*
- **Pr( a < X<sub>1</sub> < b, c < X<sub>2</sub> < d)** é encontrada pela integral dupla da densidade Normal bivariada sobre os intervalos (a, b) e (c, d).
- A integral dupla sobre todos os valores de X<sub>1</sub> e X<sub>2</sub> da densidade Normal bivariada é um.

## A distribuição Normal Bivariada

- **O parâmetro ρ na densidade Normal Bivariada é o coeficiente de correlação entre X<sub>1</sub> e X<sub>2</sub>.**
- Se ρ = 0, X<sub>1</sub> e X<sub>2</sub> são descorrelatados, mas da expressão da densidade Normal bivariada podemos perceber que a densidade conjunta reduz-se ao produto das densidades marginais.
- **Logo, no caso da distribuição Normal bivariada (e apenas nele!!!!), correlação zero é equivalente à independência entre as duas variáveis aleatórias.**

## A distribuição Normal Bivariada

- **Os valores esperados das densidades condicionais são funções lineares. Por exemplo:**

$$E(X_2 | X_1 = x_1) = \mu_2 + \rho \cdot \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \cdot (x_1 - \mu_1)$$

- **Note que este valor esperado é chamado de regressão de X<sub>2</sub> em X<sub>1</sub> e neste caso percebemos que a função de regressão é uma função linear de X<sub>1</sub>.**

## A distribuição Normal Bivariada

- **As variâncias das densidades condicionais são constantes, e não dependem do valor da variável em que se está condicionando. Por exemplo:**

$$VAR(X_2 | X_1 = x_1) = \sigma_2^2 \cdot (1 - \rho^2)$$

- **que não depende de X<sub>1</sub>. Na verdade, quanto maior (em módulo) a correlação entre X<sub>1</sub> e X<sub>2</sub>, menor é a variância condicional (maior a informação que X<sub>1</sub> trouxe para X<sub>2</sub>).**

## A distribuição Normal Bivariada

- Isto é, se a correlação entre as duas variáveis é grande (em módulo), o conhecimento de uma das variáveis (densidade condicional) implica numa redução substancial da incerteza (variância) da outra.
- Por outro lado, se a correlação entre as variáveis é pequena, o efeito de conhecer uma variável sobre a incerteza na densidade condicional é pequeno também, e a variância condicional está próxima da variância da variável "sozinha" (variância da densidade marginal).
- **No limite, se  $\rho = 0$ , as variáveis são independentes, e conhecer uma delas não traz qualquer informação sobre a outra variável.**

## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

- Lembramos novamente que o caso  $\rho = 0$  corresponde à independência entre  $X_1$  e  $X_2$ , pois neste caso a densidade conjunta anterior é apenas o produto das marginais, que são  $N(0,1)$  e  $N(0,4)$ .
- **A densidade condicional de  $X_2$  dado  $X_1 = x_1$  é Normal, com média e variância dadas por:**

## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

- Sejam  $X_1 \sim N(0, 1)$  e  $X_2 \sim N(0, 4)$ .
- **Escreva a densidade Normal bivariada neste caso em função de  $\rho$  e calcule as densidades condicionais quando  $\rho = 0.5, -0.5, 0, 0.8, -0.8$ .**
- **Solução**

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi(1)(2)\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left(\frac{x_1}{1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 - 2\rho \cdot \left(\frac{x_1}{1}\right) \cdot \left(\frac{x_2}{2}\right) \right] \right\}$$

## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

$$E(X_2 | x_1) = 0 + \rho \cdot \left(\frac{2}{1}\right) \cdot (x_1 - 0) = 2 \cdot \rho \cdot x_1$$

$$VAR(X_2 | x_1) = (2)^2 \cdot (1 - \rho^2) = 4 \cdot (1 - \rho^2)$$

- **A densidade condicional de  $X_1$  dado  $X_2 = x_2$  é Normal com média e variância dadas por:**

$$E(X_1 | x_2) = 0 + \rho \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (x_2 - 0) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot x_2$$

$$VAR(X_1 | x_2) = (1)^2 \cdot (1 - \rho^2) = 1 - \rho^2$$

## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

- A próxima tabela exhibe os valores das médias e variâncias condicionais para os valores de  $\rho$  especificados.

$\rho$	$E(X_2 x_1)$	$VAR(X_2 x_1)$	$E(X_1 x_2)$	$VAR(X_1 x_2)$
-0.8	$(-1.6)x_1$	$4(0.36) = 1.44$	$(-0.4)x_2$	0.36
-0.5	$(-1.0)x_1$	$4(0.75) = 3.00$	$(-0.25)x_2$	0.75
0	0	4	0	1
0.5	$(+1.0)x_1$	$4(0.75) = 3.00$	$(+0.25)x_2$	0.75
0.8	$(+1.6)x_1$	$4(0.36) = 1.44$	$(+0.4)x_2$	0.36

## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

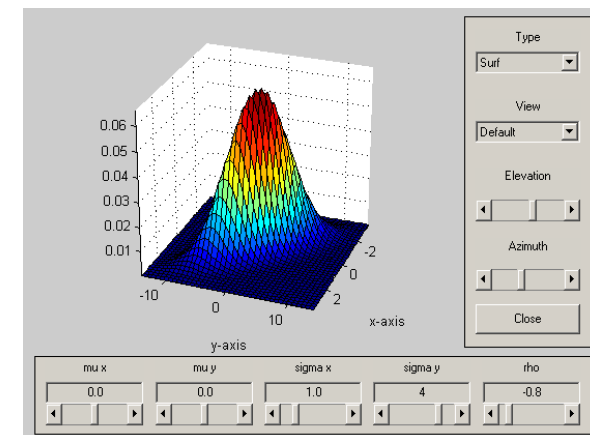
- Da tabela notamos que, a variância incondicional de  $X_2$  (quando  $X_1$  não é levado em consideração, ou quando as duas variáveis são independentes) é 4. Esta variância se reduz quando o coeficiente de correlação aumenta em módulo.
- A média condicional de  $X_2$  dado  $x_1$  não depende de  $x_1$  quando as variáveis são independentes, e é uma reta quando  $\rho \neq 0$ . O coeficiente angular desta reta varia de acordo com o valor de  $\rho$ , podendo ser negativo ou positivo. Comentários semelhantes se aplicam à distribuição condicional de  $X_1$  dado  $x_2$ .

## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

- A seguir mostramos densidades Normais bivariadas com  $\mu_1$  e  $\mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1^2 = 1$   $\sigma_2^2 = (4)^2 = 16$  e  $\rho$  com diversos valores.
- Verifique e compare as curvas de nível destas densidades.

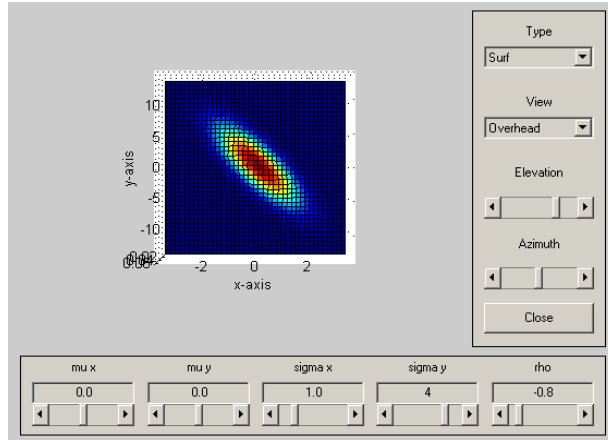
## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

- $\rho = -0.8$  (Densidade Bivariada)



## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

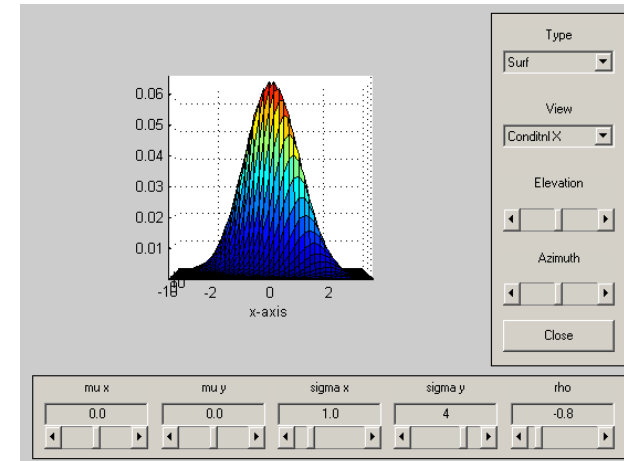
□  $\rho = -0.8$  (Curvas de Nível – são ELIPSES!)



69

## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

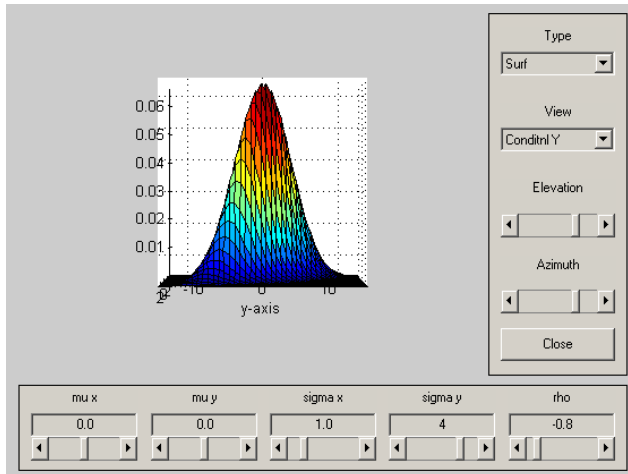
□  $\rho = -0.8$  (Densidade Condicional de  $X_1$  dado  $X_2$ )



70

## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

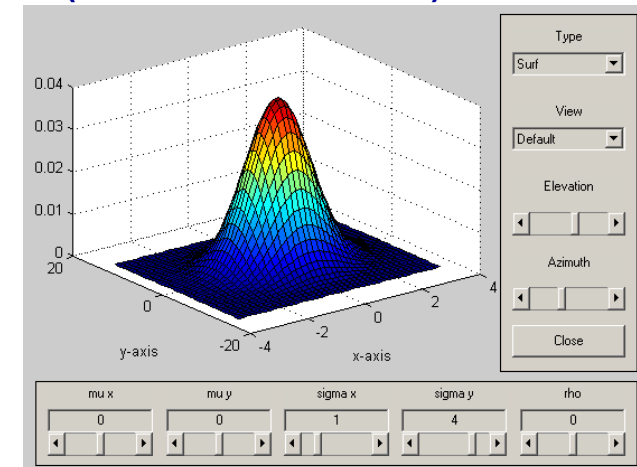
□  $\rho = -0.8$  (Densidade Condicional de  $X_2$  dado  $X_1$ )



71

## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

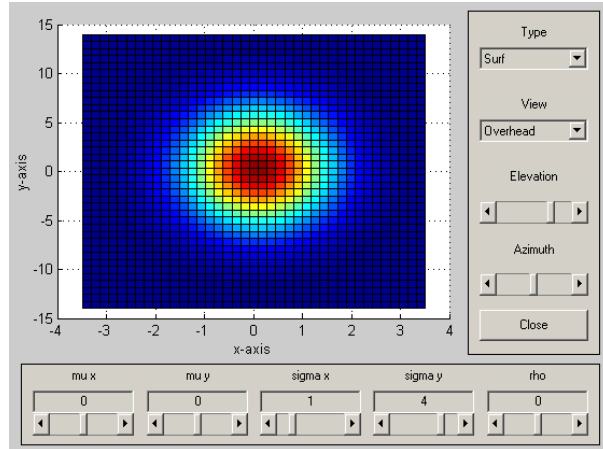
□  $\rho = 0$  (Densidade Bivariada)



72

## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

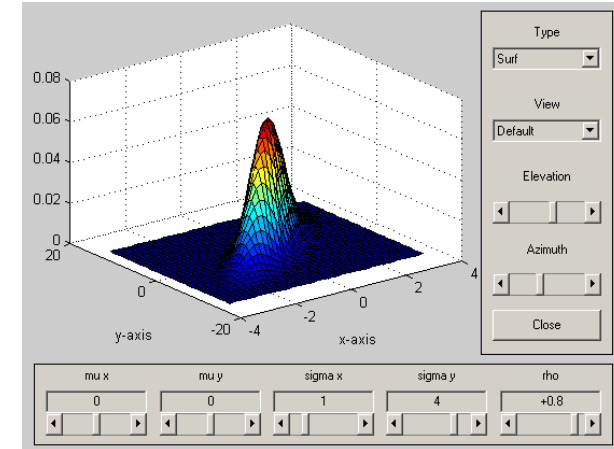
□  $\rho = 0$  (Curvas de Nível – são CÍRCULOS)



73

## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

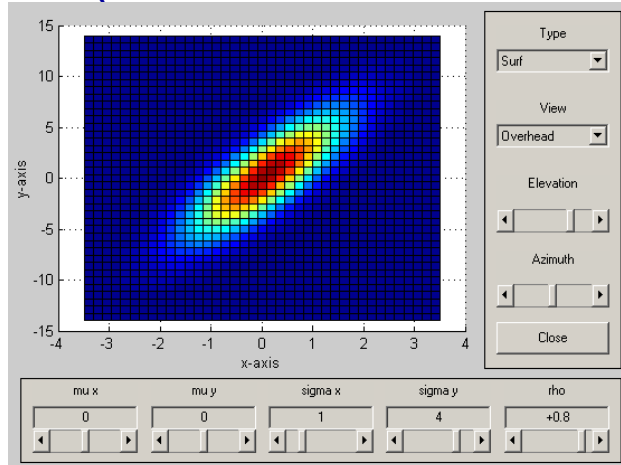
□  $\rho = +0.8$  (Densidade Bivariada)



74

## A distribuição Normal Bivariada - Exemplo

□  $\rho = +0.8$  (Curvas de Nível – são ELIPSES!)



75

## Distribuição Normal bivariada (para casa)

- Num certo instante de tempo, as taxas de juros de 30 e 60 dias têm, conjuntamente, uma distribuição Normal bivariada com médias 16% e 16.8% ao ano, e desvios padrões 4% e 5% ao ano respectivamente.
- A correlação entre as taxas é 90%. Calcule:

76

## Distribuição Normal bivariada (para casa)

- a) A probabilidade da taxa de 30 dias estar entre 14% e 18%.
- b) A probabilidade da taxa de 60 dias estar entre 14% e 18%.
- c) A probabilidade da taxa de 30 dias estar entre 14% e 18% sabendo que a taxa de 60 dias está hoje em 22%.
- d) A probabilidade da taxa de 30 dias estar entre 14% e 18% sabendo que a taxa de 60 dias está hoje em 15%.
- e) A probabilidade da taxa de 60 dias estar entre 14% e 18% sabendo que a taxa de 30 dias está hoje em 18%.

monica.barros@ibge.gov.br

77

## Distribuição Normal bivariada (para casa)

- Fez-se uma pesquisa de preços de roupas masculinas num shopping center. Uma amostra dos produtos existentes revela que o preço das calças é uma variável Normal com média R\$ 80 e desvio padrão R\$ 30. O preço das camisas é, por sua vez, uma variável Normal com média R\$ 60 e desvio padrão R\$ 25. A correlação entre os preços de calças e camisas é 0.6. Calcule as seguintes probabilidades:
  - a) De um par de calças custar entre R\$ 60 e R\$ 95.

monica.barros@ibge.gov.br

78

## Distribuição Normal bivariada (para casa)

- b) De um par de calças custar entre R\$ 60 e R\$ 95 sabendo que uma camisa custa R\$ 75 nesta loja.
- c) De um par de calças custar entre R\$ 60 e R\$ 95 sabendo que uma camisa custa R\$ 50 nesta loja.
- d) Qual é a distribuição condicional dos preços das camisas sabendo que o preço das calças é R\$ 100?
- e) Qual é a distribuição condicional dos preços das camisas sabendo que o preço das calças é R\$ 70?

monica.barros@ibge.gov.br

79