

Probabilidade II

Aula 11

Junho de 2009

Mônica Barros, D.Sc.

monica.barros@ibge.gov.br

1

Conteúdo

- A distribuição Normal bivariada – continuação
- A função geradora de momentos

monica.barros@ibge.gov.br

2

A distribuição Normal Bivariada – cont.

- É uma distribuição conjunta para duas variáveis X_1 e X_2 , ambas Normais e, a princípio dependentes.

- A densidade conjunta é dada por:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_1\sigma_2} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \cdot R\right\}$$

- Onde R é:

$$R = \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho \cdot \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

monica.barros@ibge.gov.br

3

A distribuição Normal Bivariada – cont.

- Esta densidade conjunta é chamada de densidade **Normal Bivariada** com parâmetros $\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_2^2$, onde μ_1 e μ_2 são números reais quaisquer, ρ está restrito ao intervalo $(-1,1)$ e σ_1^2, σ_2^2 são positivos.

- Se $(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ então:

monica.barros@ibge.gov.br

4

A distribuição Normal Bivariada – cont.

- A densidade marginal de X_1 é $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
- A densidade marginal de X_2 é $N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- As densidades condicionais também são Normais.
- A densidade condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ é: $(X_1 | X_2 = x_2) \sim N\left(\mu_1 + \rho \cdot \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \cdot (x_2 - \mu_2), \sigma_1^2 \cdot (1 - \rho^2)\right)$
- A densidade condicional de X_2 dado $X_1 = x_1$ é: $(X_2 | X_1 = x_1) \sim N\left(\mu_2 + \rho \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \cdot (x_1 - \mu_1), \sigma_2^2 \cdot (1 - \rho^2)\right)$

A distribuição Normal Bivariada – cont.

- Para simplificar os cálculos, considere as variáveis normalizadas:

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \quad \text{e} \quad Z_2 = \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}$$

- Note que

$$dz_1 = \frac{dx_1}{\sigma_1} \Rightarrow dx_1 = \sigma_1 \cdot dz_1$$

$$dz_2 = \frac{dx_2}{\sigma_2} \Rightarrow dx_2 = \sigma_2 \cdot dz_2$$

A distribuição Normal Bivariada – cont.

- Demonstração
- Suponha que X_1 e X_2 tenham densidade conjunta Normal Bivariada com parâmetros $\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_2^2$.

- Quem é a densidade marginal de X_1 ?
- Por definição:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\} dx_2$$

A distribuição Normal Bivariada – cont.

- O Jacobiano da transformação de (X_1, X_2) para (Z_1, Z_2) é:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \frac{\partial x_2}{\partial z_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

- A conjunta de Z_1 e Z_2 é:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[z_1^2 + z_2^2 - 2\rho \cdot z_1 \cdot z_2\right]\right\} \sigma_1 \sigma_2$$

A distribuição Normal Bivariada – cont.

□ A marginal de Z_1 torna-se:

$$f_{z_1}(z_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} [(z_1)^2 + (z_2)^2 - 2\rho z_1 z_2]\right\} \sigma_1 \sigma_2 dz_2$$

□ Faça agora:

$$w = \frac{z_2 - \rho z_1}{\sqrt{1-\rho^2}} \Rightarrow w^2 = \frac{z_2^2 - 2\rho z_1 z_2 + \rho^2 z_1^2}{1-\rho^2}$$

A distribuição Normal Bivariada – cont.

□ Ou seja:

$$\begin{aligned} f_{z_1}(z_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} [z_1^2(1-\rho^2) + w^2(1-\rho^2)]\right\} dz_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2} [z_1^2 + w^2]\right\} dz_2 \end{aligned}$$

□ E como

$$dw = \frac{dz_2}{\sqrt{1-\rho^2}} \Rightarrow dz_2 = dw\sqrt{1-\rho^2}$$

A distribuição Normal Bivariada – cont.

□ Segue que:

$$\begin{aligned} f_{z_1}(z_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2} [z_1^2 + w^2]\right\} dw \sqrt{1-\rho^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-1}{2} [z_1^2 + w^2]\right\} dw = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} z_1^2\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-1}{2} [w^2]\right\} dw = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} z_1^2\right\} \end{aligned}$$

□ Pois a integral é apenas a integral de uma densidade $N(0,1)$ e portanto é igual a 1.

A distribuição Normal Bivariada – cont.

□ Em outras palavras: Z_1 é $N(0,1)$.

□ Por construção, X_1 é igual a $\mu_1 + \sigma_1 Z_1$ e portanto é $N(\mu_1, \sigma_1^2)$.

□ E a densidade condicional de Z_2 dado Z_1 é:

$$f(z_2 | z_1) = \frac{f(z_1, z_2)}{f_1(z_1)}$$

A distribuição Normal Bivariada – cont.

- Ou seja:

$$\begin{aligned}
 f(z_2 | z_1) &= \frac{f(z_1, z_2)}{f_1(z_1)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(z_1^2 + z_2^2 - 2\rho z_1 z_2)\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-1}{2}z_1^2\right\}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(z_1^2 + z_2^2 - 2\rho z_1 z_2 - (1-\rho^2)z_1^2)\right\} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(z_2^2 - 2\rho z_1 z_2 + \rho^2 z_1^2)\right\} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(z_2 - \rho z_1)^2\right\}
 \end{aligned}$$

monica.barros@ibge.gov.br

13

A distribuição Normal Bivariada – cont.

- Resultados análogos podem ser obtidos para a densidade marginal de X_2 e para a condicional de X_1 dado X_2 .
- Faça-os como exercício!

monica.barros@ibge.gov.br

15

A distribuição Normal Bivariada – cont.

- Isto é, Z_2 dado Z_1 é Normal com média ρZ_1 e variância $1 - \rho^2$.
- Transformando para as variáveis originais leva a: X_2 dado X_1 é Normal com média
- $\mu_2 + \sigma_2 E(Z_2 | Z_1) = \mu_2 + \sigma_2 \rho (X_1 - \mu_1) / \sigma_1 =$
- $= \mu_2 + \rho (\sigma_2 / \sigma_1) (X_1 - \mu_1)$
- E variância $\sigma_2^2 \text{VAR}(Z_2 | Z_1) = \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$

monica.barros@ibge.gov.br

14

Função Geradora de Momentos

$$M(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} e^{tx} \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} e^{tx} \cdot \text{Pr}(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

- A função geradora de momentos é um dos objetos mais úteis em Probabilidade, mas esta função **nem sempre existe**. Por isso, em cursos mais avançados usa-se a função característica, que sempre existe. O uso da função característica é mais complicado que o da função geradora de momentos, pois envolve números complexos.
- Frequentemente iremos abreviar “função geradora de momentos” por **fgm**.

monica.barros@ibge.gov.br

16

Propriedades da Função Geradora de Momentos

- 1) **A função geradora de momentos é única e determina completamente a distribuição da variável aleatória.**
- Assim, se duas variáveis aleatórias têm a mesma função geradora de momentos, elas têm a *mesma* distribuição.

Propriedades da Função Geradora de Momentos

- Logo, se você tiver uma tabela de funções geradoras de momentos, você poderá **identificar** qual a densidade que corresponde a uma dada função geradora de momentos.
- Isso é análogo ao uso de uma **tabela de transformadas** de Laplace ou Fourier (dada a função, sabe-se qual a sua transformada, e vice-versa).

Propriedades da Função Geradora de Momentos

2) $M(0) = 1$

- 3) Se $M(t)$ existe para $t \in (-h, h)$ então as derivadas de todas as ordens existem em $t = 0$. Além disso, as derivadas de $M(t)$ em $t = 0$ fornecem os momentos de X .

$$M^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k M(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = E(X^k)$$

A existência do k -ésimo momento da distribuição implica na existência dos momentos de ordem menor que k . Em particular, **a existência da variância implica na existência da média** (mas a recíproca não é verdadeira).

Função Geradora de Momentos – exemplo 1

- Considere um jogo no qual você pode ganhar 0, 1 ou 2 reais, ou perder 2 ou 1 reais com as probabilidades especificadas na tabela a seguir.

x	Pr(X = x)
-2	0.20
-1	0.10
0	0.40
1	0.10
2	0.20

Calcule a função geradora de momentos de X e, a partir dela, encontre a média da distribuição (que representa o seu ganho esperado nesse jogo).

Verifique que a média encontrada por este procedimento é a mesma que a média encontrada pela definição.

Função Geradora de Momentos – exemplo 1

- Pela definição de média:

$$E(X) = \sum_{x=-2}^2 x \cdot \Pr(X=x) = \frac{-4}{10} + \left(\frac{-1}{10}\right) + 0 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = 0$$

- Ou seja, o ganho esperado neste jogo é zero.

- A função geradora de momentos é:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=-2}^2 e^{tx} \cdot \Pr(X=x) = \left(\frac{2}{10}\right)e^{-2t} + \left(\frac{1}{10}\right)e^{-t} + \left(\frac{4}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)e^t + \left(\frac{2}{10}\right)e^{2t}$$

- A primeira derivada da função geradora de momentos é:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \left(\frac{-4}{10}\right)e^{-2t} + \left(\frac{-1}{10}\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{10}\right)e^t + \left(\frac{4}{10}\right)e^{2t}$$

Função Geradora de Momentos – exemplo 2

- Nota: **Teorema Binomial**

- Na demonstração do próximo exemplo empregaremos um resultado conhecido como Teorema Binomial, que é apenas uma maneira de expandir um polinômio.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{onde } a \text{ e } b \text{ são número reais e } k, n \text{ são inteiros } \geq 0$$

Função Geradora de Momentos – exemplo 1

- A média de X é a primeira derivada da função geradora de momentos em zero, isto é:

$$\left. \frac{dM(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left(\frac{-4}{10}\right) + \left(\frac{-1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{4}{10}\right) = 0$$

- O que concorda com o resultado encontrado antes (pela definição da média).

Função Geradora de Momentos – exemplo 2

- Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição **Binomial** e parâmetros n e p, dada por: $\Pr(X=x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ onde $q=1-p$ e $x=0,1,2,\dots,n$

- Calcule a função geradora de momentos e, a partir dela, encontre a média e a variância de X.

- Solução

- Pela definição da fgm:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} e^{tx} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n = (pe^t + 1 - p)^n$$

- Onde, na penúltima igualdade acima, aplicamos diretamente o teorema Binomial.

Função Geradora de Momentos – exemplo 2

- A primeira derivada da fgm é:

$$M'(t) = n.(pe^t + q)^{n-1}.(pe^t)$$

- A média da distribuição é obtida avaliando-se esta derivada em $t = 0$, isto é:

$$M'(0) = E(X) = n(p+q)^{n-1}.(p) = np \rightarrow \text{Onde usamos o fato: } p + q = 1$$

- A segunda derivada de $M(t)$ é:

$$M''(t) = n.p.e^t.(q + npe^t).(q + pe^t)^{n-2}$$

Função Geradora de Momentos – exemplo 2

- Ao avaliarmos esta 2a. derivada em $t = 0$ encontramos o 2o. momento, $E(X^2)$:

$$M''(0) = E(X^2) = np.(q + np)(q + p)^{n-2} = np.(q + np)$$

- A variância é obtida a partir dos dois primeiros momentos:

$$\text{VAR}(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = npq + (np)^2 - (np)^2 = npq$$

Função Geradora de Momentos – exemplo 3

- Seja X uma variável aleatória com fgm
- $M(t) = \exp(t^2/2)$
- Podemos obter os momentos de X por diferenciação, mas neste caso há uma maneira mais inteligente de calculá-los, que nos fornece uma expressão geral para todos os momentos de X .

- A expansão de Taylor de $\exp(t^2/2)$ ao redor de zero é:

Função Geradora de Momentos – exemplo 3

$$\begin{aligned} e^{t^2/2} &= 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{t^2}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{t^2}{2}\right)^k + \dots = \\ &= 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \dots + \frac{t^{2k}}{(k!)(2^k)} + \dots \end{aligned}$$

- Mas, em geral, a expansão de Taylor de uma função geradora de momentos $M(t)$ em torno de zero é:

$$E(e^{tX}) = 1 + t.E(X) + \frac{t^2.E(X^2)}{2!} + \dots + \frac{t^k.E(X^k)}{k!} + \dots$$

Função Geradora de Momentos – exemplo 3

- Igualando estas duas expressões termo a termo encontramos:

$$E(X^{2k}) = \frac{(2k!)}{(k!)(2^k)} \quad \text{potências pares}$$

$$E(X^{2k-1}) = 0 \quad \text{potências ímpares}$$

- onde $k = 1, 2, 3, \dots$
- Veremos que esta é a fgm de uma variável Normal com média 0 e variância 1.

Função Geradora de Momentos – exemplo (para casa)

- Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade Poisson com média λ .
- Encontre a função geradora de momentos e use-a para mostrar que:
 - $E(X) = \text{VAR}(X) = \lambda$

- **Dica:** lembre-se da série de Taylor da exponencial, isto é:

$$e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \dots$$

Função Geradora de Momentos – exemplo (para casa)

- Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade:

$$f(x) = q \cdot p^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e } q = 1 - p \quad \text{onde } 0 < p < 1$$

- Calcule a função geradora de momentos de X .
- A partir da função geradora de momentos, encontre a média e a variância de X .
- **Dica** - use a série geométrica, isto é:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{1}{1-a} \quad \text{desde que } |a| < 1$$

Função Geradora de Momentos – exemplo (para casa)

- Seja X uma v.a. com fgm $M(t)$ que é finita num intervalo aberto contendo zero.
- Seja $Q(t) = \ln(M(t))$.
- Mostre que a média e a variância de X são dadas, respectivamente, por $Q'(0)$ e $Q''(0)$.

Função Geradora de Momentos – exemplo (para casa)

- Seja Z uma v.a. $N(0,1)$.
- Mostre que sua fgm é $\exp(-t^2/2)$.
- Use este fato e a relação entre uma $N(a, b^2)$ e a $N(0,1)$ para provar que a fgm de uma v.a. com densidade $N(a, b^2)$ é $\exp(a.t + b^2.t^2/2)$

Função Geradora de Momentos – exemplo (para casa)

- Seja X uma variável Gama(a, b).
- Mostre que sua fgm é $(b/(b-t))^a$ e que a fgm só existe se $t < b$.
- Aproveite para encontrar (são casos particulares) a fgm de uma variável Qui-Quadrado com k graus de liberdade e a fgm de uma variável Exponencial com parâmetro a (e média $1/a$).

Fgm de Combinações Lineares de v.a. Independentes

- Da definição de fgm, vimos que ela caracteriza unicamente uma densidade ou função de probabilidade.
- Assim, conhecer uma densidade, ou função de probabilidade é equivalente a conhecer a fgm da v.a.

Fgm de Combinações Lineares de v.a. Independentes

- Veremos nos próximos slides que é fácil encontrar a fgm de combinações lineares de v.a. Independentes (e, em particular, da soma de v.a.).
- Então, se a fgm de uma combinação linear de variáveis é uma fgm conhecida, automaticamente sabemos qual a distribuição desta combinação linear, o que nos dá um método simples para descobrir a distribuição destas variáveis.

Fgm de Combinações Lineares de v.a. Independentes

- Sejam X_1, X_2, \dots, X_n **independentes** (mas não necessariamente identicamente distribuídos) tais que: $E(X_i) = \mu_i$ e $VAR(X_i) = \sigma_i^2$.

- Seja:

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

Fgm de Combinações Lineares de v.a. Independentes

- A função geradora de momentos de Y é:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E(e^{t(a_0 + a_1 X_1 + \dots + a_n X_n)}) \\ &= E(e^{ta_0} e^{ta_1 X_1} \dots e^{ta_n X_n}) = \\ &= e^{ta_0} E(e^{ta_1 X_1} \dots e^{ta_n X_n}) \end{aligned}$$

e como consequência da independência

$$\begin{aligned} &= e^{ta_0} E(e^{ta_1 X_1}) E(e^{ta_2 X_2}) \dots E(e^{ta_n X_n}) = \\ &= e^{ta_0} M_{X_1}(ta_1) M_{X_2}(ta_2) \dots M_{X_n}(ta_n) \end{aligned}$$

A soma de v.a. independentes

- Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a. independentes mas não necessariamente identicamente distribuídas.

- Seja:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

A soma de v.a. independentes

- A fgm de Y é:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E(e^{t(X_1 + \dots + X_n)}) = E(e^{tX_1} \dots e^{tX_n}) = \\ &= E(e^{tX_1}) E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n}) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t) \end{aligned}$$

- Ou seja, a expressão da fgm de Y é muito simples, apenas o produto das fgms das variáveis independentes que compõem a soma!**

A Média Amostral

□ A fgm da média amostral também pode ser encontrada como um caso particular da combinação linear de v.a. independentes.

□ Seja Y a soma de X_1, X_2, \dots, X_n , que são todos iid. Então:

$$M_{\bar{X}}(t) = E(e^{t\bar{X}}) = E(e^{tY/n}) = M_Y(t/n) = [M_{X_1}(t/n)]^n$$