ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Probabilidade II
Aula 3

Março de 2009

Mônica Barros, D.Sc.

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Conteúdo

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Momentos Condicionais

- **Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias contínuas ou discretas.**
- **Podemos definir o valor esperado condicional de X_2 dado $X_1 = x_1$ como o valor esperado de X_2 usando-se a densidade condicional de X_2 dado $X_1 = x_1$ (ao invés de usarmos a densidade marginal de X_2).**
- **No caso contínuo:**

$$E(X_2 \mid X_1 = x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 . f(x_2 \mid x_1) dx_2$$

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Momentos Condicionais

- **O caso discreto é análogo, apenas substituindo a integral pelo somatório para todo valor de X_2.**
- **Note que $E(X_2 \mid X_1 = x_1)$ é uma função de x_1, e x_1 é um valor da variável aleatória X_1.**
- **O gráfico da função $E(X_2|x_1)$ versus os valores possíveis de x_1 é chamado de *regressão de X_2 em x_1 ou Curva de Regressão de X_2 em X_1*.**

Momentos Condicionais

- Pode-se mostrar que, se X_1 e X_2 têm densidade Normal bivariada (uma densidade importante que estudaremos posteriormente), a curva de regressão de X_2 em X_1 é, na verdade, uma reta, ou seja, $E(X_2 \mid X_1 = x_1)$ tem a forma: $a.x_1 + b$.

- É claro que uma "curva" de regressão linear não é a regra, é a exceção, mas uma exceção tão importante que dá origem aos métodos de regressão linear usados na prática!

Momentos Condicionais

- Analogamente à definição de média condicional, podemos também definir a variância condicional de X_2 dado $X_1 = x_1$. Esta é a variância calculada usando-se a densidade condicional ao invés da marginal. Por exemplo, no caso contínuo:

$$VAR\left(X_2 \middle| X_1 = x_1\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_2 - \mu_{2|1}\right)^2 f\left(x_2 \middle| x_1\right) dx_2 \quad \text{onde}$$

$$\mu_{2|1} = E\left(X_2 \middle| X_1 = x_1\right) \text{ é a média condicional}$$

Exemplo 1

- Considere novamente o Exemplo 3 da aula 1, isto é, X e Y têm densidade conjunta:

$$f(x,y) = \frac{x.y}{3} + x^2 \quad \text{onde } 0 < x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2$$

- Já vimos que a densidade condicional de Y dado X =x é:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{\frac{xy}{3} + x^2}{\frac{2x}{3} + 2x^2} = \frac{1}{2}.\left[\frac{x + y/3}{x + 1/3}\right], \text{ onde x } \in (0,1] \text{ e y } \in [0,2]$$

- Note que nesta densidade, Y é a variável aleatória, e X deve ser pensado como um parâmetro que caracteriza a densidade (um "número").

Exemplo 1

- A média e variância condicionais de Y dado X = x são calculadas a partir desta densidade.

$$E(Y \mid X = x) = \int_0^2 y.f(y \mid x)dy = \int_0^2 y.\left(\frac{x + y/3}{2(x+1/3)}\right)dy = \frac{1}{2(x+1/3)}\int_0^2 y.\left(x + \frac{y}{3}\right)dy =$$

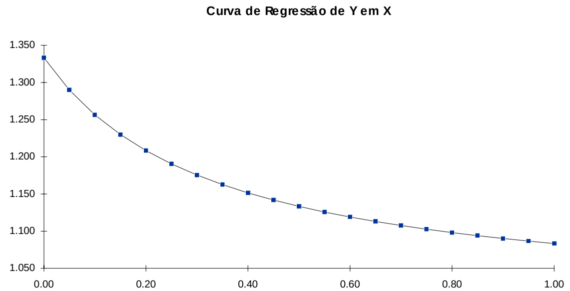
$$= \frac{1}{2(x+1/3)}.\left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{9}\right)\Bigg|_{y=0}^{2} = \frac{1}{2(x+1/3)}\left(2x + \frac{8}{9}\right) = \frac{9x+4}{9x+3}$$

- Note que isso é uma função de X.

- Calcule a variância condicional (para casa).

Exemplo 1

- A curva de regressão de Y em X é o gráfico da média condicional calculado na página anterior para todo valor de X (isto é, X no intervalo (0,1)).



Exemplo 2 (para casa)

- Considere a seguinte densidade conjunta:

$$f(x,y)=\frac{1}{4}.e^{-y/2},\ x>0,\ y>x$$

a) Ache a densidade marginal de X.

b) Ache a densidade marginal de Y.

c) Calcule Pr(X > 1 | Y < 4)

Dica: $\int u.e^{au}du=\frac{e^{au}}{a}.\left(u-\frac{1}{a}\right)$

Exemplo 3 (para casa)

- Considere as seguintes distribuições conjuntas:
  - a) f(x, y) = 4.x.y.exp{ $-x^2 - y^2$} para $x \geq 0,\ y \geq 0$
  - b) f(x, y) = $3.x^2/y^3$ para $0 \leq x \leq y \leq 1$
- Em cada caso, determine se X e Y são independentes.

Exemplo 4 (para casa)

- Considere o exercício para casa da aula 1, isto é:

$$f(x,y)=cy^2+2xy \quad \text{onde } 0\leq x\leq 1 \quad \text{e} \quad 0\leq y\leq 1$$

- Calcule a constante c que faz f(x,y) ser uma densidade (se você ainda não resolveu isso na aula 1).
- Calcule a média condicional de X dado Y = y.
- X e Y são independentes? Por que? Justifique.

Exemplo 5

- Suponha que a densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}6xy(2-x-y) & \text{se } 0<\text{x}<1 \text{ e } 0<\text{y}<1\\ 0 & \text{do contrário}\end{cases}$$

- Calcule a média condicional de X dado Y = y onde 0 < y < 1.

Exemplo 5

$$f(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{6xy(2-x-y)}{\int_0^1 6xy(2-x-y)dx}=\frac{6xy(2-x-y)}{y(4-3y)}$$

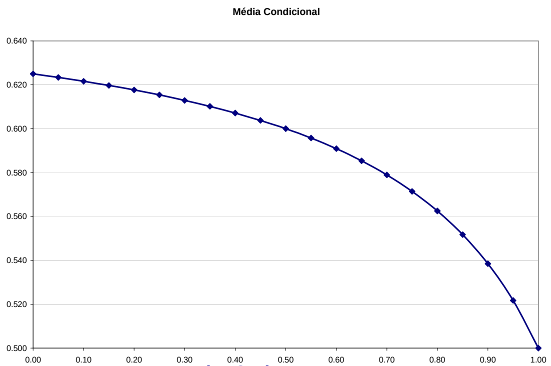
- Logo, a média condicional é:

$$E(X|Y=y)=\int_0^1\frac{6x^2(2-x-y)}{4-3y}dx=\frac{1}{4-3y}\left\{\frac{12x^3}{3}-\frac{6x^4}{4}-\frac{6yx^3}{3}\right\}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{4-3y}\{4-1.5-2y\}=\frac{5-4y}{2(4-3y)}=\frac{5-4y}{8-6y}$$

Exemplo 5

- O gráfico da média condicional é mostrado a seguir:



Exemplo 6

- A densidade conjunta de X e Y é:

$$f(x,y)=\frac{1}{2}y.e^{-xy}\quad \text{se}\quad 0<\text{x}<\infty\ \text{ e } 0<\text{y}<2$$

- Ache a média condicional de X de Y = y.
- Solução

$$f(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{2}ye^{-xy}}{\int_0^\infty \frac{1}{2}ye^{-xy}dx}=\frac{\frac{1}{2}ye^{-xy}}{\frac{1}{2}y\left(\frac{e^{-xy}}{-y}\right)\Big|_0^\infty}=y.e^{-xy}\quad \text{x}>0$$

Exemplo 6

- Ou seja, condicionalmente a Y = y, X é uma variável Exponencial com parâmetro y (ou seja, com média 1/y).
- Você pode também provar isso analiticamente, sem reconhecer a forma específica da densidade condicional.
- Para casa – calcule a média condicional de exp($e^{X/2}$)

Exemplo 7 (para casa)

- Sejam X e Y v.a. contínuas com densidade conjunta:

$$f(x, y) = cx^2 + xy \quad \text{onde } 0 \le x \le 1 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le 1$$

- Encontre a constante c que faz desta expressão uma densidade.
- Encontre a densidade marginal de X.
- Encontre a densidade marginal de Y.
- Encontre a densidade condicional de Y dado X = x.
- Ache a média condicional de Y dado X = x.
- X e Y são independentes? Por que? Justifique.