Probabilidade II
Aula 4

Março de 2009

Mônica Barros, D.Sc.

Conteúdo

- Somas de variáveis aleatórias independentes – a fórmula da convolução
- Mais sobre Funções de probabilidade e densidades condicionais
- Falta de memória da Geométrica e da Exponencial
- Exemplos

A soma de duas variáveis aleatórias independentes

- ***Este é um dos problemas mais importantes em Probabilidade. Por que?***
- Freqüentemente iremos encontrar conjuntos de variáveis aleatórias que são independentes e identicamente distribuídas (isto é, variáveis que, num certo sentido, são "todas iguais" pois têm a mesma distribuição de probabilidade e uma não afeta as outras).

A soma de duas variáveis aleatórias independentes

- Este conjunto de variáveis é chamado de variáveis iid, ou amostra aleatória.
- Suponha que a média de todos os X_i ´s é desconhecida.
- Um estimador (ou "chute") que parece bastante sensato para a média da distribuição dos X_i´s é:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{a média amostral}$$

- Mas, para calcularmos a média amostral precisamos saber qual a distribuição da soma dos X_i´s e assim deve ser claro porquê a distribuição de probabilidade da soma aparece com frequência na prática.

A soma de duas variáveis aleatórias independentes

- **Teorema (Fórmula da Convolução)**
- **Seja $Z = X + Y$ onde X e Y são variáveis independentes com densidade conjunta $f(x, y) = f_x(x).f_y(y)$.**
- **Então a densidade de Z é dada por:**

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x).f_y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y).f_y(y)dy$$

- **E no caso discreto a função de probabilidade de Z é:**

$$g(z) = \Pr(Z = z) = \sum_{\text{todo x}} f_x(x).f_y(z-x) = \sum_{\text{todo y}} f_x(z-y).f_y(y)$$

Exemplo 1

- **Suponha que X e Y são independentes e identicamente distribuídas com densidade Exponencial(λ).**
- **Seja Z = X + Y. Encontre a densidade de Z.**
- **Solução**
- **A densidade de X é: $\lambda.e^{-\lambda x}$, x > 0.**
- **A densidade de Y é : $\lambda.e^{-\lambda y}$, y > 0.**
- **Como X e Y são independentes, a densidade conjunta é apenas o produto destas marginais.**
- **A densidade de Z = X + Y é obtida através da fórmula da convolução.**

Exemplo 1

$$g(z) = \int_0^{\infty} f_x(x).f_y(z-x)dx = \int_0^{\infty} \lambda.e^{-\lambda x}.\lambda\left(e^{-\lambda(z-x)}\right)dx$$

- **Mas, o integrando acima é positivo se, e somente se, ambos os termos são positivos. Para que isto aconteça é necessário que x > 0 e, ao mesmo tempo, z - x > 0, isto é, x < z. Logo, os limites de integração são 0 e z na integral anterior.**

$$g(z) = \int_0^{z} \lambda.e^{-\lambda x}.\lambda e^{-\lambda z}.e^{+\lambda x}dx = \lambda^2.e^{-\lambda z}\int_0^{z} dx = \lambda^2.e^{-\lambda z}\left(x\right)\Big|_0^z = \lambda^2.z.e^{-\lambda z}$$

- **Ou seja, a soma de duas variáveis Exponenciais independentes e identicamente distribuídas NÃO É uma variável Exponencial.**

Exemplo 2

- **Sejam X e Y variáveis independentes discretas com distribuição Poisson com média k. Encontre a função de probabilidade de Z=X+Y.**

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{e^{-k}.k^x}{x!} \text{ onde } x = 0,1,2,......$$

e

$$f(y) = \Pr(Y = y) = \frac{e^{-k}.k^y}{y!} \text{ onde } y = 0,1,2,......$$

Exemplo 2

- Pela fórmula da convolução:

$$g(z)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-k}.k^{x}}{x!}.\frac{e^{-k}.k^{z-x}}{(z-x)!}=e^{-2k}\sum_{x=0}^{z}\frac{1}{x!(z-x)!}.k^{x}.k^{z-x}=\frac{e^{-2k}}{z!}\sum_{x=0}^{z}\frac{z!}{x!(z-x)!}.k^{x}.k^{z-x}=$$

$$=\frac{e^{-2k}}{z!}\sum_{x=0}^{z}\binom{z}{x}.k^{x}.k^{z-x}=\frac{e^{-2k}}{z!}.(k+k)^{z}=\frac{e^{-2k}.(2k)^{z}}{z!}$$

- Note que o somatório (que ia de x = 0 a ∞) passou a ser um somatório de x = 0 até x = z.

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 2

- Isto acontece por que precisamos garantir que ambas as funções de probabilidade no somatório sejam maiores que zero, o que só ocorre se AMBOS x > 0 e z-x > 0.

- Na penúltima igualdade à direita usamos o teorema Binomial para concluir que o somatório era igual a $(2k)^z$.

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 2

- Lembre-se...
- Teorema Binomial
- É apenas a expressão do triângulo de Pascal que você aprendeu na escola, é só uma maneira de expandir um polinômio.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \quad \text{onde a e b são número reais e k, n são inteiros} \geq 0$$

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 2

- O que existe de interessante neste exemplo?
- Note que, ao contrário do Exemplo 1, aqui “preservamos” a mesma “família” de funções de probabilidade.

- Em outras palavras: a soma de duas Poisson independentes é Poisson, mas a soma de duas Exponenciais independentes não é Exponencial!

Exemplo 3

- Sejam X e Y v.a. independentes com função de probabilidade Geométrica(p).
- Encontre a função de probabilidade de Z = X+Y.
- Solução
- Pela fórmula da convolução:

$$g(z) = \sum_{x=1}^{\infty} p.(1-p)^{x-1}.p.(1-p)^{(z-x)-1} =$$

$$= \sum_{x=1}^{z-1} p^2.(1-p)^{z-2} = p^2.(1-p)^{z-2}.\sum_{x=1}^{z-1} 1 = (z-1)\,p^2.(1-p)^{z-2}$$

Exemplo 3

- No último passo acima o somatório não envolve x e existem (z-1) termos no somatório.
- Note que os limites do somatório são 1 e z-1 pois precisamos satisfazer simultaneamente às condições x > 1 e z- x > 1.
- A função de probabilidade condicional de X dado Z é obtida pela razão entre a conjunta de X e Z e a marginal de Z, recém calculada.

Exemplo 3

- Mas, a conjunta de X e Z é a conjunta de X e X + Y, ou seja, é a mesma coisa que a conjunta de X e Y.
- Esta função de probabilidade conjunta é, pela independência de X e Y, apenas o produto das marginais. Logo a conjunta de X e Z é:

$$f(x,z) = \Pr(X = x, Z = z) = \Pr(X = x, X + Y = z) =$$

$$= \Pr(X = x, Y = z - x) = p.(1-p)^{x-1}.p(1-p)^{(z-x)-1}$$

$$= p^2(1-p)^{z-2}$$

Exemplo 3

- A função de probabilidade condicional de X dado X+Y = z é então:

$$g(x \mid Z = z) = \frac{f(x,z)}{g(z)} = \frac{p^2.(1-p)^{z-2}}{(z-1).p^2.(1-p)^{z-2}} = \frac{1}{z-1}$$

onde x = 1, 2, ... z - 1

- Ou seja, X dado a soma e X e Y é Uniforme Discreta nos inteiros 1, 2, .., z-1.

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Para Casa

- 1) Considere o Exemplo 2.
- Encontre a distribuição condicional de X dado Z = X + Y.
- 2) Sejam X e Y independentes e identicamente distribuídos Bin(n, p). Mostre que Z = X + Y é Binomial (2n, p) e encontre a distribuição condicional de X dado Z = X + Y.

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 4

- Suponha que X e Y sejam iid Geom(p).

1. Encontre a distribuição de U = mín(X,Y)
2. Ache Pr(mín(X,Y) = X) = Pr(Y ≥ X)

- Solução
- Para u um inteiro maior ou igual a 1 segue que:

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 4

$$\Pr(mín(X,Y)\geq u)=\Pr(X\geq u, Y\geq u)=\Pr(X\geq u).\Pr(Y\geq u)$$

- Mas:

$$\Pr(X\geq u)=1-\Pr(X<u)=1-\Pr(X\leq u-1)=$$
$$=1-\sum_{x=1}^{u-1}q^{x-1}p=1-p.q^{-1}\sum_{x=1}^{u-1}q^{x}=1-p.q^{-1}\left\{\frac{q^u}{q-1}-\frac{q}{q-1}\right\}=$$
$$=1-\frac{p}{q}\left\{\frac{q^u}{q-1}-\frac{q}{q-1}\right\}=1-\frac{p}{q}\left\{\frac{-q^u}{p}+\frac{q}{p}\right\}=1+q^{u-1}-1=q^{u-1}$$

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 4

- E como X e Y são iid, esta última probabilidade é igual à Pr(Y ≥ u).
- Então:

$$\Pr(mín(X,Y)\geq u)=\Pr(X\geq u).\Pr(Y\geq u)=\left(q^{u-1}\right)^2=\left(q^2\right)^{u-1}$$

- Logo, U = mín(X,Y) é tal que $\Pr(U\geq u)=\left(q^2\right)^{u-1}$
- Por analogia com os resultados desenvolvidos para X, segue que U também é uma v.a. Geométrica, mas com probabilidade de sucesso $p^* = 1 - q^2 = 2p - p^2$.

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Nota

- A definição de probabilidade condicional também se aplica quando condicionamos à própria variável, ou seja, quando X e Y coincidem.
- Especificamente:

$$\Pr\left(Y \in B \middle| Y \in A\right) = \frac{\Pr(Y \in B, Y \in A)}{\Pr(Y \in A)} = \frac{\Pr(Y \in A \cap B)}{\Pr(Y \in A)}$$

- Em particular, se B $\subseteq$ A segue que:

$$\Pr\left(Y \in B \middle| Y \in A\right) = \frac{\Pr(Y \in A \cap B)}{\Pr(Y \in A)} = \frac{\Pr(Y \in B)}{\Pr(Y \in A)}$$

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 5

- Uma moeda honesta é jogada 3 vezes. Sabendo que "caras" aparece pelo menos uma vez, qual a probabilidade de aparecer exatamente 3 vezes?

- Solução
- Seja Y o número de "caras" nas 3 jogadas. Como a moeda é honesta, sabemos que Y é Binomial com parâmetros n = 3 e p = ½.

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 5

- Queremos achar Pr(Y = 3 | Y $\geq$ 1).

$$\Pr\left(Y = 3 \middle| Y \geq 1\right) = \frac{\Pr\left(Y = 3, Y \geq 1\right)}{\Pr(Y \geq 1)} = \frac{\Pr(Y = 3)}{\Pr(Y \geq 1)} = \frac{\Pr(Y = 3)}{\Pr(Y = 1,2,3)} =$$

$$= \frac{\Pr(Y = 3)}{1 - \Pr(Y = 0)} = \frac{1/8}{1 - 1/8} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$$

ENCE Escola Nacional de Ciências Estatísticas IBGE

Exemplo 6 – a falta de memória da Geométrica

- Seja X uma variável Geom(p). Calcule:
- Pr(X = t + s | X > t) onde t e s são inteiros $\geq$ 1.

- Solução
- Do exemplo 4 desta aula (vide slide 19) vimos que, para qualquer <u>u</u> inteiro $\geq$ 1:

$$\Pr\left(X \geq u\right) = q^{u-1}$$

Exemplo 6

- Então:
- $\Pr(X > t) = \Pr(X \geq t) - \Pr(X = t) = q^{t-1} - q^{t-1}.p$
  $= q^{t-1}.(1-p) = q^{t-1}.\ q = q^t$

- Logo:

$$\Pr(X = t+s | X > t) = \frac{\Pr(X = t+s, X > t)}{\Pr(X > t)} = \frac{\Pr(X = t+s)}{\Pr(X > t)} =$$

$$= \frac{q^{t+s-1}p}{q^t} = q^{s-1}.p = \Pr(X = s)$$

Exemplo 6

- Assim, a distribuição condicional de X – t dado X > t é também geométrica com o mesmo parâmetro que a distribuição de X.

- Esta propriedade é conhecida como a "falta de memória da distribuição geométrica".

Exemplo 7 – falta de memória da Exponencial

- Seja X uma variável Exponencial com parâmetro λ. Calcule $\Pr(X \geq t + s \mid X \geq t)$ onde <u>t</u> e <u>s</u> são reais não negativos.
- Solução
- É análoga à do exemplo anterior.
- Lembre-se que, se X é Expo(λ) então sua função de distribuição é:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \int_0^x \lambda.e^{-\lambda.z}dz = 1 - e^{-\lambda.x} \quad \text{para todo } x \geq 0$$

Exemplo 7

- Logo, $\Pr(X > x) = \Pr(X \geq x) = \exp(-\lambda.x)$

$$\Pr(X \geq t+s | X \geq t) = \frac{\Pr(X \geq t+s, X \geq t)}{\Pr(X \geq t)} = \frac{\Pr(X \geq t+s)}{\Pr(X \geq t)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda(t)}} = e^{-\lambda s} = \Pr(X \geq s)$$

- Suponha que X representa a duração de um equipamento.
- A propriedade de "falta de memória" da Exponencial nos diz que este equipamento não apresenta desgaste.

Exemplo 7

- Em outras palavras, se sabemos que o equipamento já durou t “horas”, a probabilidade dele durar mais s “horas” é igual à de um equipamento *novo* durar as mesmas s “horas”.

- É claro que isso limita o uso da distribuição Exponencial como modelo para a duração de equipamentos, pois podemos imaginar que apenas aparelhos muito “longe” da sua vida útil possam exibir esta propriedade, ou seja, não ter desgaste.