ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Probabilidade II
Aula 5

Março de 2009

Mônica Barros, D.Sc.

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Conteúdo

- Fórmula da Convolução – continuação
- Mais sobre momentos condicionais. Cálculo de valores esperados através do condicionamento numa variável – relação entre valores esperados condicionais e incondicionais – fórmulas de "Adão e Eva"

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 1

- Sejam X e Y iid Unif(0,1). Mostre que a soma de X e Y tem uma densidade triangular no intervalo (0,2).

- Solução
- A densidade de X (e também de Y) é:

$$f(x) = 1 \text{ se } 0 < x < 1$$

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 1

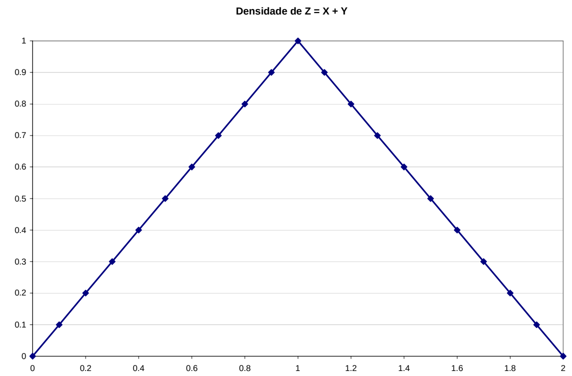
- Pela fórmula da convolução, se Z = X + Y:

$$f_Z(z) = \int_0^1 f_X(z-y) f_Y(y)dy = \int_0^1 f_X(z-y)(1)dy =$$

$$= \begin{cases} \int_0^z dy = z & \text{se } 0 < z \leq 1 \\ \int_{z-1}^1 dy = 2 - z & \text{se } 1 < z < 2 \end{cases}$$

Exemplo 1

- O gráfico da densidade de Z está a seguir:



Mais sobre momentos condicionais

- Nosso objetivo agora é demonstrar e aplicar duas expressões que irei chamar de "Fórmulas de Adão e Eva" :
- Seja E(X|Y) a função da v.a. cujo valor em Y = y é E(X | Y = y).
- Note que E(X|Y) é uma variável aleatória, pois é função da v.a. Y. Analogamente, VAR(Y|X) é também uma variável aleatória, que é função apenas de Y.

Mais sobre momentos condicionais

- Fórmulas de "Adão e Eva"

$$E_X(X) = E_Y\{E_{X|Y}(X|Y)\} \qquad (1)$$

e

$$VAR_X(X) = E_Y\{VAR_{X|Y}(X|Y)\} + VAR_Y\{E_{X|Y}(X|Y)\} \qquad (2)$$

- Os subscritos nestas fórmulas servem para ajudar você a lembrar qual a densidade (ou função de probabilidade) está sendo usada para o cálculo daquele momento.

Mais sobre momentos condicionais

- O que a fórmula (1) significa?
- Se Y é uma v.a. discreta então (1) diz que:

$$E(X) = \sum_{\text{todo y}} E(X \mid Y = y)\Pr(Y = y)$$

- Se Y é contínua então (1) afirma que:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y) f_Y(y) dy$$

Mais sobre momentos condicionais

- Demonstração (X e Y v.a. discretas)

$$E(X) = \sum_{\text{todo y}} E(X \mid Y = y)\Pr(Y = y) = \sum_{\text{todo y}} \sum_{\text{todo x}} x \Pr(X = x \mid Y = y)\Pr(Y = y) =$$

$$= \sum_{\text{todo y}} \sum_{\text{todo x}} x \frac{\Pr(X = x, Y = y)}{\Pr(Y = y)} \Pr(Y = y) = \sum_{\text{todo x}} x \sum_{\text{todo y}} \Pr(X = x, Y = y) =$$

$$= \sum_{\text{todo x}} x.\Pr(X = x) = E(X)$$

Mais sobre momentos condicionais

- Como interpretar a fórmula (1)?
- Esta fórmula nos diz que uma maneira de calcular a média de X, E(X), é através de uma média ponderada do valor esperado condicional de X dado Y=y, onde cada termo E(X | Y = y) é ponderado pela probabilidade do evento em que se está condicionando, ou seja, é ponderado por Pr(Y = y).

Exemplo 2

- Para ir de casa para a faculdade você tem duas opções de trajeto, ambas demoram meia hora.
- No primeiro, o número de sinais fechados é uma v.a. Poisson com média 6,3 sinais em 30 minutos.
- No segundo trajeto, o número de sinais fechados é uma v.a. Poisson com média 8,1 sinais em 30 minutos.
- Você escolhe o seu caminho jogando uma moeda honesta.
- Em média, quantos sinais fechados você vai pegar no trajeto?

Exemplo 2

- Neste exemplo, condicionar é absolutamente essencial para resolver o problema.
- Seja Y = 1 ou 2, indicando o trajeto escolhido. Ambos os valores têm a mesma probabilidade (1/2), pois você escolhe o caminho jogando uma moeda honesta.
- O número esperado de sinais fechados no seu trajeto é então:

$$E(X) = E(X \mid Y = 1).\Pr(Y = 1) + E(X \mid Y = 2).\Pr(Y = 2) =$$

$$= (6,3)\frac{1}{2} + (8,1)\frac{1}{2} = 7,2$$

Exemplo 3 (a soma de um número aletório de v.a.)

- Este exemplo tem importantes aplicações práticas, como descrito a seguir.
- Seja N o número de acidentes num determinado intervalo de tempo, uma variável aleatória.
- Seja X_i o número de feridos no i-ésimo acidente, i = 1, 2, 3, ..., supostos independentes e identicamente distribuídos, e independentes de N.
- Então T, o número total de feridos no intervalo de tempo de interesse, é:

Exemplo 3 (a soma de um número aletório de v.a.)

$$T = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

- Ou seja, T é uma soma de v.a. com um número aleatório (N) de termos.
- Qual será a média de T? A resposta é dada imediatamente pela fórmula (1).

$$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right)\right]$$

Exemplo 3 (a soma de um número aletório de v.a.)

- Mas,

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N = n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| N = n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n.E(X)$$

- Pela independência dos X's e N, o que resulta em:

$$E(T) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right)\right] = E\big(N.E(X)\big) = E(N).E(X)$$

Exemplo 4 (média da v.a. Geométrica)

- Uma experiência Bernoulli com probabilidade de sucesso p é realizada nas mesmas condições, e de maneira independente, até que o primeiro sucesso seja observado.
- Seja N o número de repetições até observar o primeiro sucesso. Então N é uma v.a. Geométrica(p) cuja função de probabilidade é:

$$f(n) = \Pr(N = n) = q^{n-1}.p \quad \text{para n} = 1,2,3,....$$

Exemplo 4 (média da v.a. Geométrica)

- Mostre, usando a fórmula (1), que a média de N é 1/p.

- Solução
- Seja Y = 1 se a *primeira* repetição é um "sucesso", Y = 0 do contrário. Note que Y = 1 ocorre com probabilidade p e Y = 0 com probabilidade q = 1 – p.
- Então:
- E(N) = E(N | Y = 1).Pr(Y=1) + E(N | Y = 0).Pr(Y=0) =

  = p. E(N | Y = 1) + (1-p) . E(N | Y = 0)

Exemplo 4 (média da v.a. Geométrica)

- Agora, quem são estes valores esperados condicionais?
- E(N | Y = 1) = 1, pois se a primeira "jogada" foi um sucesso, o número de "jogadas" necessário até encontrar o 1o. "sucesso" (que é a variável N) é 1.

- E(N | Y = 0)? Nesta situação sabe-se que a primeira tentativa NÃO FOI um "sucesso", foi uma "falha. Mas, como as repetições sucessivas são, por hipótese, independentes, após observar a 1a. repetição, o número adicional de repetições até o primeiro "sucesso" continua sendo E(N).

Exemplo 4 (média da v.a. Geométrica)

- Então:
- E(N) = p. E(N | Y = 1) + (1-p) . E(N | Y = 0) =

  = p.(1) + (1- p). E(N)

- (1-1+p).E(N) = p + 1 – p = 1
- p.E(N) = 1
- E(N) = 1/p

Exemplo 5 – variância de uma soma de um número aleatório de v.a.

- Considere novamente o exemplo 3.
- Como podemos calcular VAR(T)?
- Solução
  - Pela fórmula (2)
  - VAR(T) = E(VAR(T|N)) + VAR(E(T|N)) =

    = E(VAR(T|N)) + VAR{ N.E(X)} =

    = E(VAR(T|N)) + $\{E(X)\}^2$.VAR(N)

- O problema se resume ao cálculo do primeiro termo, que pode ser feito de maneira semelhante ao problema 3.

Exemplo 5 – variância de uma soma de um número aleatório de v.a.

- Note que:

$$VAR(T \mid N=n) = VAR\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right) = VAR\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| N=n\right) =$$

$$= VAR\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n.VAR(X)$$

- Assim:

$$VAR(T \mid N) = N.VAR(X)$$

Que é uma função da variável N (pois VAR(X) é uma constante).

Exemplo 5 – variância de uma soma de um número aleatório de v.a.

- Logo:

$$VAR(T) = VAR\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(VAR(T \mid N)) + VAR(E(T \mid N)) =$$

$$= E(N.VAR(X)) + \{E(X)\}^2.VAR(N) =$$

$$= VAR(X).E(N) + \{E(X)\}^2.VAR(N)$$

Exemplo 6

- Na situação do exemplo anterior, se N é uma variável Poisson(λ), então T é conhecida como uma variável *Poisson composta*.

- Neste caso, E(N) = VAR(N) = λ e então:

$$E(T) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right)\right] = E(N).E(X) = \lambda.E(X)$$

$$VAR(T) = VAR\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = VAR(X).E(N) + \{E(X)\}^2.VAR(N) =$$

$$= \lambda.VAR(X) + \lambda.\{E(X)\}^2$$

Exemplo 6

- Mas, lembre-se que, para qualquer v.a. X:
- VAR(X) = E(X^2) – {E(X)}^{2}

- Assim:
- E(X^2) = VAR(X) + {E(X)}^{2}
- Substituindo esta expressão no slide anterior leva a:

$$VAR(T) = \lambda.VAR(X) + \lambda.\{E(X)\}^2 = \lambda.E(X^2)$$