Probabilidade II
Aula 6

Março de 2009

Mônica Barros, D.Sc.

Conteúdo

- Mais sobre momentos condicionais. Cálculo de valores esperados através do condicionamento numa variável – relação entre valores esperados condicionais e incondicionais – fórmulas de "Adão e Eva"
- Exemplos

Da aula passada….

- Fórmulas de "Adão e Eva"

$$E_X(X) = E_Y\{E_{X|Y}(X|Y)\} \qquad (1)$$

e

$$VAR_X(X) = E_Y\{VAR_{X|Y}(X|Y)\} + VAR_Y\{E_{X|Y}(X|Y)\} \qquad (2)$$

Exemplo 1

- Um presidiário descobre que na sua cela existem 3 túneis, que ele pode escolher aleatoriamente.
- No 1o túnel ele consegue fugir após *duas* horas de trajeto.
- No 2o. túnel, ele *volta à cela após três horas* de viagem.
- No 3o. túnel, ele *volta à cela após uma hora* de viagem.
- Supondo que, a qualquer momento, o presidiário escolhe um dos túneis ao acaso, qual o intervalo de tempo esperado até ele conseguir fugir?

Exemplo 1 – Solução

- Seja X o tempo até o presidiário conseguir escapar, e Y o túnel escolhido.
- Então queremos encontrar E(X), e faremos isso condicionando nos diversos valores de Y.

$$E(X) = E(X|Y=1).\Pr(Y=1) + E(X|Y=2).\Pr(Y=2) + E(X|Y=3).\Pr(Y=3) =$$
$$= \frac{1}{3}\{E(X|Y=1) + E(X|Y=2) + E(X|Y=3)\}$$

Exemplo 1 – Solução

- Mas: E(X| Y = 1) = 2
- E(X| Y = 2) = 3 + E(X). Por que? Se ele escolhe o segundo túnel, ele passa 3 horas no túnel e então retorna à cela, e o problema volta exatamente às mesmas condições que antes, mas com um tempo adicional de 3 horas.
- Analogamente:
- E(X| Y = 3) = 1 + E(X).

Exemplo 1 – Solução

- Assim:

$$E(X) = \frac{1}{3}\{E(X|Y=1) + E(X|Y=2) + E(X|Y=3)\} =$$
$$= \frac{1}{3}\{2 + 3 + E(X) + 1 + E(X)\} = \frac{1}{3}\{2E(X) + 6\}$$
$$\frac{E(X)}{3} = 2 \Rightarrow E(X) = 6$$

Exemplo 2 – variância da v.a. Geométrica

- Veja o exemplo 4 da aula passada (média da v.a. Geométrica)
- Seja N o número de repetições até observar o primeiro sucesso.
- Então N é uma v.a. Geométrica(p).
- Mostre, usando as fórmulas de “Adão e Eva”, que a variância de N é q/p^2.

Exemplo 2 – variância da v.a. Geométrica

- **Solução**
- **Pela definição de variância:**
- **$VAR(N) = E(N^2) - \{E(N)\}^2 = E(N^2) - (1/p)^2$ pois a média de N já foi calculada no exemplo 4 da aula passada.**

- **Seja Y = 1 se a *primeira* repetição é um "sucesso", Y = 0 do contrário. Note que Y = 1 ocorre com probabilidade p e Y = 0 com probabilidade q = 1 – p.**

Exemplo 2 – variância da v.a. Geométrica

- **Então:**
- **$E(N^2) = E(E(N^2 \mid Y)) = p.E(N^2|Y=1) + (1-p).\ E(N^2|Y=0) =$**

- **Mas:**
- **$E(N^2|Y=1) = 1$ pois se a primeira repetição resulta num sucesso (isto é, Y = 1), então N = 1 e $N^2 = 1$.**
- **Do contrário, se Y = 0 (a primeira repetição não é um sucesso), então o número total de repetições necessárias até obter o primeiro sucesso será 1 mais o número de repetições adicionais, que tem a mesma distribuição que N.**

Exemplo 2 – variância da v.a. Geométrica

- **Então:**
- **$E(N^2|Y=0) = E\{(1+N)^2\}$**
- **Assim:**
- **$E(N^2) = E(N^2|Y=0).\ Pr(Y=0) + E(N^2|Y=1).\ Pr(Y=1)$ $= E(1 + 2N + N^2).(1-p) + (1).p$**

- **$E(N^2) - (1-p).E(N^2) = (1-p) + p + 2(1-p).E(N)$**
- **$p.\ E(N^2) = 1 + 2(1-p)(1/p)$**
- **$p.E(N^2) = \{ p + 2 - 2p\}/p = \{2 - p\}/p$**
- **$E(N^2) = \{2 - p\}/p^2$**

Exemplo 2 – variância da v.a. Geométrica

- **Logo:**
- **$VAR(N) = E(N^2) - \{E(N)\}^2 =$**

  $= (2-p)/p^2 - (1/p)^2 = (2-p-1)/p^2 = (1-p)/p^2 =$

  $= q/p^2$

Cálculo de probabilidades através do condicionamento

- Seja E um evento qualquer e defina o indicador deste evento como:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se o evento E ocorre} \\ 0 & \text{se o evento E não ocorre} \end{cases}$$

- Então, pela definição de X:

$$E(X) = 0.\Pr(X=0) + 1.\Pr(X=1) = \Pr(X=1) = \Pr(E)$$

- Ou seja, a média do indicador é igual à probabilidade de ocorrência do evento E.

Cálculo de probabilidades através do condicionamento

- E o que acontece se condicionamos a uma outra variável aleatória Y?

$$\Pr(E) = E(X) = E\left(E(X \mid Y)\right) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{\text{todo y}} \Pr\left(\mathrm{E} \mid \mathrm{Y} = \mathrm{y}\right).\Pr(Y = y) & \text{se Y é discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr\left(\mathrm{E} \mid \mathrm{Y} = \mathrm{y}\right).f_Y(y)dy & \text{se Y é contínua} \end{cases}$$

Cálculo de probabilidades através do condicionamento

- Exemplo 3
- Sejam X e Y variáveis contínuas independentes com densidades f_X e f_Y respectivamente. Calcule Pr(X < Y).

- Solução
- A idéia é condicionar aos valores de Y.

Exemplo 3 - continuação

$$\Pr(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left(X < Y \middle| Y = y\right) f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left(X < y \middle| Y = y\right) f_Y(y)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(X < y) f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y)dy$$

onde

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)dx \quad \text{é a função de distribuição acumulada de X}$$

Exemplo 4

- Considere a situação do exemplo 3 e suponha que X e Y são iid Expo(λ). Encontre Pr(X < Y).

- Solução
- Lembre-se que a função de distribuição acumulada de uma v.a. Expo(λ) é:
- F(u) = 1 – exp(-λ.u)

Exemplo 4

$$\Pr(X<Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Pr(X<y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}F_X(y)f_Y(y)dy=$$

$$=\int_0^{\infty}\{1-e^{-\lambda.y}\}\lambda.e^{-\lambda.y}dy=\int_0^{\infty}\lambda.e^{-\lambda.y}dy-\int_0^{\infty}\lambda.e^{-2\lambda.y}dy=$$

$$=1-\lambda\left(\frac{e^{-2\lambda.y}}{-2\lambda}\right)\Bigg|_0^{\infty}=1-\lambda\left(0-\frac{1}{(-2\lambda)}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

- Note que a primeira integral acima é 1 pois é a integral de uma densidade Exponencial.

Exemplo 5 (para casa)

- Refaça o exemplo anterior supondo agora que X e Y são independentes e Exponenciais, mas X tem média 1/λ e Y tem média 1/(2.λ).

Exemplo 6

- O número de carros parados numa certa “blitz” na 6a. feira é uma variável aleatória Poisson com média 12,4.

- Quando um carro é parado, verifica-se se o motorista está alcoolizado. A probabilidade disso acontecer é 25%.

- Qual a probabilidade de encontrar menos de 3 motoristas bêbados numa certa “blitz”?

Exemplo 6

- **Solução**
  - **Seja Y o número de carros parados na "blitz" numa certa 6ª. feira.**
  - **Seja X o indicador de um motorista bêbado. Queremos encontrar Pr(X < 3) para uma "blitz" típica.**

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 6

$$\Pr(X<3)=\sum_{\text{todo y}}\Pr(X<3\mid Y=y).\Pr(Y=y)$$

$$=\sum_{\text{todo y}}\Pr(X<3\mid Y=y).\frac{e^{-12,4}(12,4)^y}{y!}=$$

$$=\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-12,4}(12,4)^y}{y!}.\Pr(X=0,1,2\mid Y=y)=$$

$$=\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-12,4}(12,4)^y}{y!}.\left\{\binom{y}{0}(0,25)^0(0,75)^y+\binom{y}{1}(0,25)^1(0,75)^{y-1}+\binom{y}{2}(0,25)^2(0,75)^{y-2}\right\}$$

$$=\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-12,4}(12,4)^y}{y!}.\left\{(0,75)^y+y(0,25)(0,75)^{y-1}+\frac{y(y-1)}{2}(0,25)^2(0,75)^{y-2}\right\}$$

$= 0,401163$ (resolvido numericamente somando y até 100 - convergência obtida após 30 termos na soma)

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 7

- **(Vide o exemplo anterior e compare).**
- **Um cliente entra numa loja e compra uma camisa com probabilidade p.**
- **O número de clientes que entram na loja durante um dia é uma variável Poisson com parâmetro λ.**
- **Calcule:**
  - **A probabilidade da loja não vender qualquer camisa num certo dia.**
  - **A probabilidade da loja vender exatamente k camisas em um dia.**

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Exemplo 7

- **A estrutura deste exemplo é exatamente igual à do anterior (verifique!).**
- **Seja Y o número de clientes que entram na loja no dia.**
- **Seja X o número de camisas vendidas no dia.**
- **Então:**

Exemplo 7

$$\Pr\left(X=0\right)=\sum_{y=0}^{\infty}\Pr\left(X=0\middle|Y=y\right)\Pr(Y=y)=$$

$$=\sum_{y=0}^{\infty}\Pr\left(X=0\middle|Y=y\right)\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{y}}{y!}$$

- Mas, se y clientes entraram na loja, a probabilidade de nenhum ter comprado uma camisa é $q^y = (1-p)^y$, pois DADO Y = y, X é Binomial com parâmetros y e p.

Exemplo 7

- Então:

$$\Pr\left(X=0\right)=\sum_{y=0}^{\infty}\Pr\left(X=0\middle|Y=y\right)\Pr(Y=y)=$$

$$=\sum_{y=0}^{\infty}q^{y}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{y}}{y!}=\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}.(\lambda q)^{y}}{y!}=e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{(\lambda q)^{y}}{y!}=e^{-\lambda}.e^{\lambda q}=e^{-\lambda(1-1+p)}=e^{-\lambda.p}$$

- Para calcular a probabilidade de que exatamente k camisas sejam vendidas no dia, basta lembrar que a probabilidade condicional é Binomial(y,p), como já mencionado antes.

Exemplo 7

- Assim:

$$\Pr\left(X=k\right)=\sum_{y=0}^{\infty}\Pr\left(X=k\middle|Y=y\right)\Pr(Y=y)=$$

$$=\sum_{y=0}^{\infty}\binom{y}{k}p^{k}q^{y-k}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{y}}{y!}\quad \text{note que esta probabilidade só será diferente de zero se } k\le y$$

$$=\sum_{y=k}^{\infty}\frac{y!}{k!(y-k)!}p^{k}q^{y-k}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{y}}{y!}=\frac{e^{-\lambda}p^{k}}{k!}\sum_{y=k}^{\infty}\frac{y!}{(y-k)!}q^{y-k}\frac{.\lambda^{y}\lambda^{-k+k}}{y!}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}p^{k}}{k!}\sum_{y=k}^{\infty}\frac{\lambda^{y-k}q^{y-k}}{(y-k)!}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}p^{k}}{k!}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^{t}q^{t}}{(t)!}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^{k}}{k!}.e^{+\lambda q}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda+\lambda q}(\lambda p)^{k}}{k!}=\frac{e^{-\lambda+\lambda(1-p)}(\lambda p)^{k}}{k!}=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^{k}}{k!}$$

Exemplo 7

- Substituindo este resultado no exemplo anterior:
  - Pr(X = 0) = exp(-12,4/4) = exp(-3,1) = 0,045049
  - Pr(X = 1) = 3,1*exp(-3,1) = 0,139653
  - Pr(X = 2) = $(3,1)^2$*exp(-3,1)/2 = 0,216461
- Assim:
- Pr(X < 3) = 0,045049 + 0,139653 + 0,216461 =

=0,401163 como já havíamos mostrado numericamente