

# Probabilidade II

## Aula 7

Abril de 2009

Mônica Barros, D.Sc.

monica.barros@ibge.gov.br

1

## Conteúdo

- Prioris Uniformes
- A regra de sucessão de Laplace
- Modelo de Urna de Polya
- A regra de Bayes revisitada

monica.barros@ibge.gov.br

2

## Exemplo 1

- Considere  $n$  repetições independentes, cada uma com a mesma probabilidade de sucesso  $p$ .
- Seja  $X$  o número de sucessos nas  $n$  repetições.
- Se  $p$  é um número fixo,  $X$  é uma variável Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ .

monica.barros@ibge.gov.br

3

## Exemplo 1

- Suponha agora que  $p$  é uma variável aleatória com distribuição Uniforme(0,1).
- Calcule  $\Pr(X = x)$  usando os resultados já estudados sobre condicionamento numa variável aleatória.

monica.barros@ibge.gov.br

4

## Exemplo 1

$$\Pr(X = x) = \int_0^1 \Pr(X = x|p) \cdot f(p) dp$$

□ Mas,  $f(p)$  é a densidade Unif(0,1) e então:

$$\Pr(X = x) = \int_0^1 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} (1) dp$$

□ Para resolver esta última integral precisamos da definição da função Beta.

## Exemplo 2

□ Considere agora a situação anterior e calcule a probabilidade condicional de que a  $(r+1)$ -ésima repetição será um sucesso dado um total de  $x$  sucessos (e  $r-x$ ) falhas nas  $r$  primeiras repetições.

$$\Pr\{(r+1)\text{ésima repetição é sucesso} | x \text{ sucessos nas } r \text{ primeiras repetições}\} = \frac{\Pr\{(r+1)\text{ésima repetição é sucesso, } x \text{ sucessos nas } r \text{ primeiras repetições}\}}{\Pr\{x \text{ sucessos nas } r \text{ primeiras repetições}\}}$$

$$= \frac{\int_0^1 \Pr\{(r+1)\text{ésima repetição é sucesso, } x \text{ sucessos nas } r \text{ primeiras repetições} | p\} dp}{1/(r+1)} =$$

$$= \frac{\int_0^1 p \binom{r}{x} p^x (1-p)^{r-x} dp}{1/(r+1)} = (r+1) \binom{r}{x} \int_0^1 p^{x+1} (1-p)^{r-x} dp = (r+1) \binom{r}{x} \frac{\Gamma(x+2)\Gamma(r-x+1)}{\Gamma(r+3)} =$$

$$= \frac{(r+1)r!}{x!(r-x)!} \frac{(x+1)!(r-x)!}{(r+2)!} = \frac{(r+1)!}{(r+2)!} \frac{(x+1)!}{x!} = \frac{x+1}{r+2}$$

## Exemplo 1

□ Função Beta ( $a, b$ ) – definição

$$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}$$

□ Do slide anterior segue que:

$$\Pr(X = x) = \int_0^1 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} (1) dp = \binom{n}{x} \int_0^1 p^x (1-p)^{n-x} dp =$$

$$= \binom{n}{x} \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \frac{(x)!(n-x)!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots, n$$

## Exemplo 2

□ No caso particular  $x = r$ , a equação do slide anterior é conhecida como **regra de sucessão de Laplace**.

□ Por substituição na expressão do slide anterior:

$$\Pr\{(r+1)\text{ésima repetição é sucesso} | r \text{ sucessos nas } r \text{ primeiras repetições}\} = \frac{r+1}{r+2}$$

## Exemplo 2

- ❑ O que esta regra quer dizer?
- ❑ Se você obteve  $r$  sucessos em  $r$  repetições independentes, todas com a mesma probabilidade, a probabilidade da próxima repetição ser um sucesso é  $(r+1)/(r+2)$ .
- ❑ Esta regra causou muita controvérsia nos tempos de Laplace.

## Exemplo 2

- ❑ Em resumo:
- ❑ Se as primeiras  $r$  repetições independentes resultam em  $x$  sucessos, então a próxima repetição será um sucesso com probabilidade  $(x+1)/(r+2)$ .
- ❑ Qual a situação que, na prática, corresponde a esta questão?

## Exemplo 2

- ❑ Por que?
- ❑ O problema estava em tentar aplicá-la em situações onde não ficava realmente claro se as repetições eram independentes....
- ❑ Por exemplo, esta regra era usada para justificar proposições como: “se eu jantei bem num restaurante 2 vezes, então a probabilidade de eu jantar bem no mesmo restaurante é  $\frac{3}{4}$ ”. Quem garante que são repetições independentes com a mesma probabilidade de sucesso?

## Exemplo 2

- ❑ Imagine uma urna que inicialmente contém uma bola branca e uma bola preta.
- ❑ A cada estágio, uma bola é retirada da caixa e substituída por duas bolas da mesma cor da que foi retirada.
- ❑ Ou seja, a cada retirada, o número de bolas na caixa aumenta.

## Exemplo 2

- Por exemplo, se fizemos 2 retiradas, e nas duas encontramos bolas brancas, o que aconteceu?

- Caixa Original

1 branca  
1 preta

monica.barros@ibge.gov.br

13

## Exemplo 2

- Após a 1ª. Retirada (de uma bola branca)

2 brancas  
1 preta

- Após a 2ª. Retirada (de uma bola branca)

3 brancas  
1 preta

monica.barros@ibge.gov.br

14

## Exemplo 2

- Em geral, se, das primeiras  $r$  bolas,  $x$  forem brancas, a caixa na ocasião da  $(r+1)$ -ésima retirada conterá  $(x+1)$  bolas brancas e  $(r-x+1)$  pretas.
- Logo, a probabilidade de retirada de uma bola branca na  $(r+1)$ -ésima tentativa será:  $(x+1)/(r+2)$ .

monica.barros@ibge.gov.br

15

## Exemplo 2

- Se identificarmos “bola branca” como um “sucesso” podemos pensar nesta descrição como a justificativa da probabilidade encontrada neste exemplo.
- O esquema de amostragem descrito aqui é chamado de **Urna de Polya**.

monica.barros@ibge.gov.br

16

## A densidade Beta

- No exemplo anterior poderíamos ter usado uma densidade mais geral para  $p$ .
- Poderíamos ter suposto que  $p$  era uma v.a. com densidade Beta( $m, n$ ), ou seja:

$$f(p) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} p^{m-1} (1-p)^{n-1} \quad \text{onde } 0 < p < 1 \text{ e } m, n \text{ inteiros } \geq 1$$

## A densidade Beta

- Um caso particular importante da densidade Beta é a Unif(0,1), que ocorre quando  $m = n = 1$ .
- A vantagem em especificar uma densidade Beta( $m, n$ ) para  $p$  no Exemplo 1, ao invés da densidade Unif(0,1) é permitir que a densidade de  $p$  esteja centrada em qualquer ponto do intervalo (0,1), e que a variância possa ser grande ou pequena, dependendo da escolha dos parâmetros.

## A densidade Beta

- Se  $X$  tem densidade Beta( $m, n$ ) então:

$$E(X) = \frac{m}{m+n}$$

$$VAR(X) = \frac{mn}{(m+n+1)(m+n)^2}$$

- E o  $k$ -ésimo momento é:

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(k+m)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(k+m+n)}$$

## A regra de Bayes revisitada

- Já falamos muito sobre densidades marginais e condicionais e ainda não aproveitamos a idéia de poder “reverter” estas densidades, ou seja, usar o teorema de Bayes.
- O resultado será mostrado no caso contínuo, e é análogo no caso discreto.

## A regra de Bayes revisitada

- A densidade condicional de X dado Y é dada por:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

- Podemos escrever a densidade conjunta em termos da outra densidade condicional (isto é, de Y dado X) e assim:

$$f(x, y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)$$

## A regra de Bayes revisitada

- Juntando todos estes resultados leva a:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x) dx}$$

- Esta fórmula pode ser modificada quando uma das variáveis é contínua e a outra é discreta, ou quando ambas são discretas.

## A regra de Bayes revisitada

- Usando esta última definição da densidade conjunta para calcular a marginal de Y que aparece no denominador na definição da condicional de X dado Y temos:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x) dx$$

## Exemplo 3

- Considere a situação do exemplo 1 e calcule a densidade condicional de p dado X = x.
- Solução
- Grande parte do trabalho já foi feito no Exemplo 1, que era o cálculo do denominador (a marginal de X).

### Exemplo 3

- A densidade conjunta é:

$$f(x, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} (1) = f(x|p) \cdot f(p)$$

- A marginal de X já foi obtida no exemplo 1:

$$\Pr(X = x) = f_X(x) = \frac{1}{n+1} \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots, n$$

### Exemplo 3

- Ou seja, DADO  $X = x$ ,  $p$  tem densidade Beta com parâmetros  $(x+1)$  e  $(n-x+1)$ .
- Em particular, a média condicional de  $p$  dado  $X = x$  é:

$$E(p|X = x) = \frac{x+1}{x+1+n-x+1} = \frac{x+1}{n+2}$$

### Exemplo 3

- Note que para obter a marginal de X integramos a conjunta para todo os valores de  $p$  no exemplo 1.

- Então, agora basta aplicar a definição de densidade condicional.

$$\begin{aligned} f_{p|X}(p|x) &= \frac{\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = \\ &= \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)} p^{x+1-1} (1-p)^{n-x+1-1} \text{ para } 0 < p < 1 \end{aligned}$$

### Exemplo 4

- Seja Y o número de acidentes em que um motorista se envolve num período de tempo.
- Suponha que Y seja Poisson(u), onde u depende do motorista.
- Se escolhermos um motorista ao acaso na população podemos supor que u é uma v.a. U com densidade  $f_U$ . Note que U é contínua e maior que zero.

## Exemplo 4

- Suponha que  $U$  tem densidade Gama( $a, b$ ).
- Calcule:
  1. A função de probabilidade marginal de  $Y$ .
  2. A densidade condicional de  $U$  dado  $Y = y$ .

## Exemplo 4

- Precisamos transformar a última integral numa integral de função gama. Para isso, basta fazer a mudança de variáveis:
- $t = (b+1)u \rightarrow dt = (b+1) du$
- Os limites de integração não se alteram com a mudança de variáveis.

## Exemplo 4

- Solução
- A densidade conjunta de  $Y$  e  $U$  é:

$$f(y, u) = \frac{e^{-u} u^y}{y!} \frac{b^a u^{a-1} e^{-bu}}{\Gamma(a)} \quad \text{para } u > 0, a > 0, b > 0, y = 0, 1, 2, \dots$$

- A função de probabilidade marginal de  $Y$  é:

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \Pr(Y = y) &= \int_0^{\infty} f(y, u) du = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} u^y}{y!} \frac{b^a u^{a-1} e^{-bu}}{\Gamma(a)} du = \\ &= \frac{b^a}{y! \Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+y-1} e^{-(b+1)u} du \end{aligned}$$

## Exemplo 4

- A função de probabilidade de  $Y$  é:

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \Pr(Y = y) &= \frac{b^a}{y! \Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+y-1} e^{-(b+1)u} du = \\ &= \frac{b^a}{y! \Gamma(a)} \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{b+1} \right)^{a+y-1} e^{-t} \frac{dt}{b+1} = \\ &= \frac{b^a}{y! \Gamma(a)} \left( \frac{1}{b+1} \right)^{a+y} \int_0^{\infty} t^{a+y-1} e^{-t} dt = \\ &= \frac{b^a}{y! \Gamma(a)} \left( \frac{1}{b+1} \right)^{a+y} \Gamma(a+y) = \frac{b^a \Gamma(a+y)}{y! \Gamma(a) (b+1)^{a+y}} \end{aligned}$$

## Exemplo 4

- A densidade condicional de U dado Y= y é:

$$f_{U|Y}(u|y) = \frac{f(y,u)}{f_Y(y)} = \frac{f(y,u)}{\Pr(Y=y)} = \frac{\frac{e^{-u}u^y}{y!} \frac{b^a u^{a-1} e^{-bu}}{\Gamma(a)}}{\frac{\Gamma(a+y)b^a}{y!\Gamma(a)(b+1)^{a+y}}} = \frac{(b+1)^{a+y} e^{-(b+1)u} u^{a+y-1}}{\Gamma(a+y)}$$

- Ou seja, DADO Y = y, U é Gama com parâmetros (a + y) e (b + 1).